Escuela Colombiana de Carreras Industriales

ECCI

Escuela Tecnológica

Su Institución Universitaria

Control de procesos industriales I

Análisis de la respuesta de sistemas en el dominio de tiempo y la frecuencia

Ing. Ángela Bravo Sánchez M.Sc

MÉTODOS PARA EL ANÁLISIS Y DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL RETROALIMENTADO

Métodos de análisis

- Los sistemas de control se diseñan para conseguir un comportamiento determinado.
- Una vez obtenido el modelo matemático del sistema, disponemos de varios métodos para analizar el comportamiento del sistema

Métodos de análisis

Existen dos métodos para el análisis y diseño de sistemas de control retroalimentados

- Análisis en el dominio del tiempo
- Análisis en el dominio de la frecuencia

ANÁLISIS DE SISTEMAS EN EL DOMINIO DEL TIEMPO

Respuesta en tiempo

- La respuesta en tiempo de un sistema de control consiste en dos parte:
  - La respuesta transitoria
  - La respuesta en estado estacionario

Respuesta en tiempo

- **La respuesta transitoria**

La respuesta transitoria es definida como la parte de la respuesta en que va de un estado inicial a un estado final

- **La respuesta en estado estacionario**

Es definido como el comportamiento del sistema a la manera en la cual se comporta el sistema mientras el tiempo t se aproxima a infinito.

Respuesta en tiempo

Entonces la respuesta y(t) se puede escribir de la siguiente manera:

$$y(t) = y_t(t) + y_{ss}(t)$$

Donde

$y_t(t)$ es la respuesta transitoria

$y_{ss}(t)$ es la respuesta en estado estacionario

Análisis de Sistemas en el Dominio del Tiempo

- El estudio de un sistema de control en el dominio del tiempo involucra esencialmente la evaluación de sus respuestas transitoria y estacionaria.

- En el problema de diseño, **las especificaciones se proporcionan normalmente en términos del comportamiento transitorio y del estacionario**, y los controladores se diseñan para que todas esas especificaciones sean cumplidas por el sistema diseñado.

Entradas de un sistema de control

- Las entradas de un sistema de control pueden **variar en forma aleatoria** con respecto al tiempo.
- Esto provoca un problema para el diseñador, ya que es **difícil diseñar** un sistema de control que tenga un funcionamiento satisfactorio para todas las formas posibles de señales de entrada.
- Para propósitos de análisis y diseño, es necesario suponer algunos tipos básicos de **entradas de prueba** para evaluar el funcionamiento de un sistema.

Tipos de señales de entrada: Función paso

- También llamada función escalón o función de Heaviside
- Representa un cambio instantáneo en la entrada de referencia

$$r(t) = A\,u(t)$$

Siendo $u(t)$ la función paso

$$u(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

Tipos de señales de entrada: Función paso

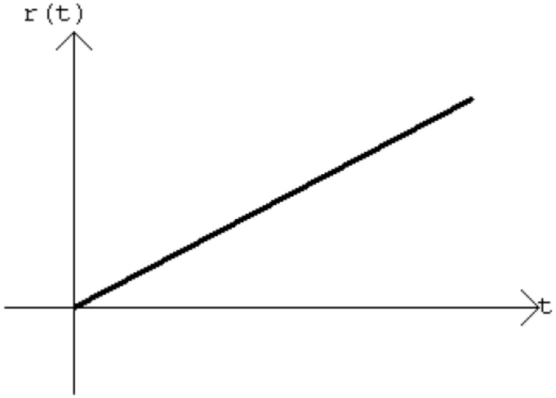
- La función paso es muy útil como señal de prueba, ya que su **salto instantáneo** inicial de amplitud **revela la velocidad de respuesta** un sistema a entradas con cambios abruptos.

Tipos de señales de entrada: Función rampa

Es una señal que cambia constantemente con el tiempo.

Matemáticamente se representa por:

$$r(t) = A\,t\,u(t)$$

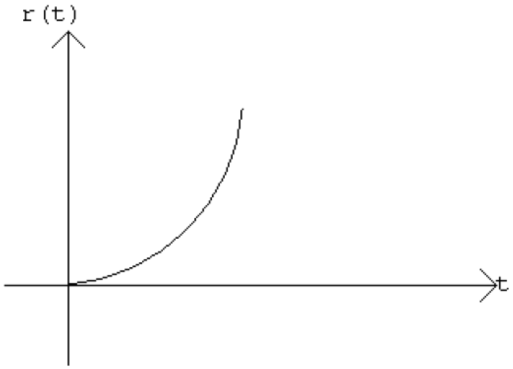


Esta señal nos dice cómo responde el sistema a señales que cambian linealmente con el tiempo

Tipos de señales de entrada: Función parabólica.

- Esta función representa una señal que tiene una variación más rápida que la función rampa.
- Matemáticamente se representa por:

$$r(t) = A\,\frac{t^2}{2}\,u(t)$$



- El factor ½ se añade por conveniencia matemática, para que la transformada de Laplace de la señal sea simplemente A/s^3

Tipos de señales de entrada: Función impulso

- La función impulso unitario o Delta de Dirac, tiene la siguiente forma matemática:

$$g(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \infty & t = 0 \\ 0 & t > 0 \end{cases}$$

- El impulso es unitario si se cumple $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,dt = 1$

- La respuesta a un impulso unitario llamada también "respuesta natural o propia" del sistema nos da idea de cuál es el comportamiento intrínseco de dicho sistema.

Orden de un sistema

El orden de un sistema se define como:

- La mayor potencia de la derivada de una ecuación diferencial
- La mayor potencia de *s* en el denominador de la función de transferencia

Ejercicio: Cuál es el orden de los sistemas descritos por las siguientes funciones de trasferencia

$$m\frac{dy(t)}{dt}+by(t)=u(t)$$

$$LC\frac{d^2y(t)}{dt^2}+RC\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=u(t)$$

$$G(s)=\frac{1}{ms^2+bs+k}$$

$$G(s)=\frac{1}{RCs+1}$$

$$G(s)=\frac{1}{LCs^2+RCs+1}$$

Orden de un sistema

El orden de un sistema se define como:

- La mayor potencia de la derivada de una ecuación diferencial
- La mayor potencia de *s* en el denominador de la función de transferencia

Ejercicio: Cuál es el orden de los sistemas descritos por las siguientes funciones de trasferencia

$$m\frac{dy(t)}{dt} + by(t) = u(t)$$ *Primer orden*

$$LC\frac{d^2y(t)}{dt^2} + RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t)$$ *Segundo orden*

$$G(s) = \frac{1}{ms^2 + bs + k}$$ *Segundo orden*

$$G(s) = \frac{1}{RCs + 1}$$ *Primer orden*

$$G(s) = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1}$$ *Segundo orden*

Polos y ceros de la función de transferencia

- Qué son los Polos de una función de transferencia?

- Qué son los Ceros de una función de tranferencia?

Polos y ceros de la función de transferencia

- Polos

Los polos de una función de transferencia son los valores de la variable de la transformada de Laplace, s, que ocasionan que la función de transferencia se vuelva infinita

- Ceros

Los ceros de una función de trasferencia son los valores de la variable de la transformada de Laplace, s, que ocasiona que la función se transferencia se convierta en cero

Matlab

El comando `roots` de Matlab retorna las raíces del polinomio

- Consideremos el siguiente polinomio:

$$P = s^4 + 4s^3 + 4s^2 + s + 20$$

```
p=[1 4 4 1 20];
r=roots(p);
r =
  -2.6545 + 1.2595i
  -2.6545 - 1.2595i
   0.6545 + 1.3742i
   0.6545 - 1.3742i
```

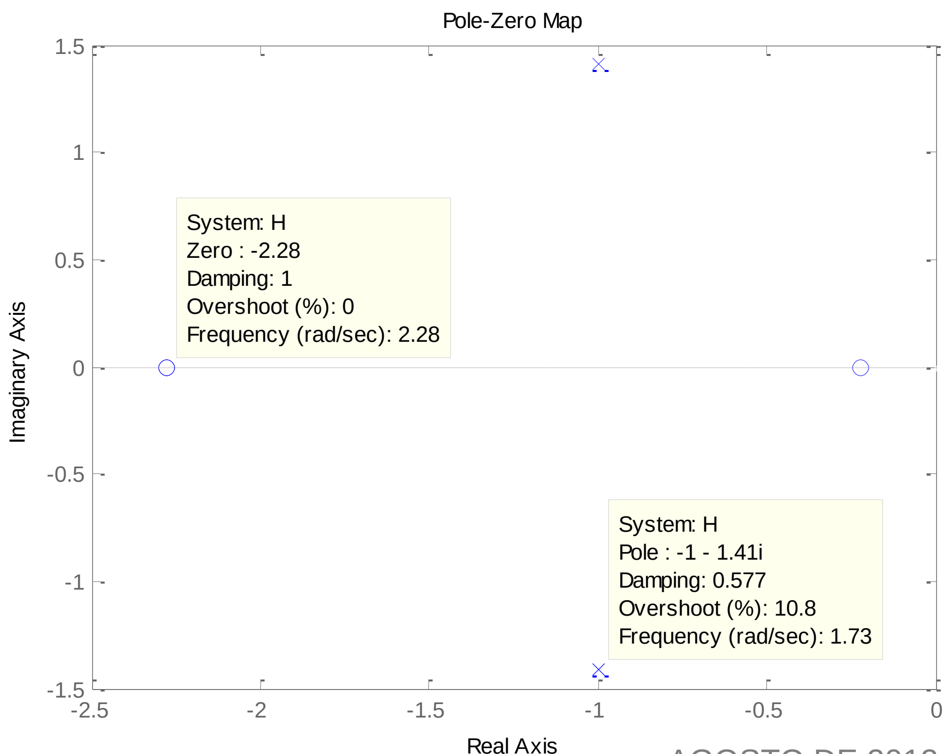
Matlab

- Alternativamente un mapa con la ubicación de los polos y ceros se puede obtener con la función `pzmap` (polos x, ceros o)

Ejemplo

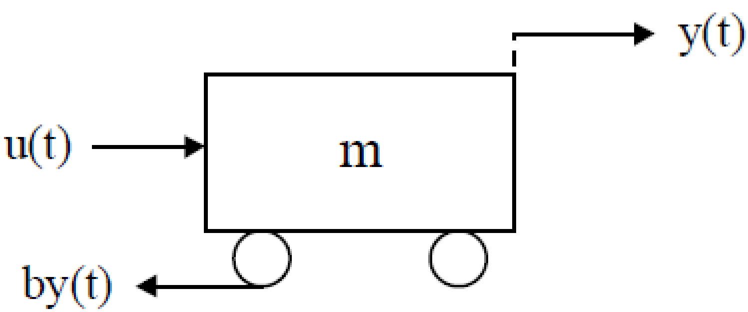
$$H(s) = \frac{2s^2 + 5s + 1}{s^2 + 2s + 3}$$

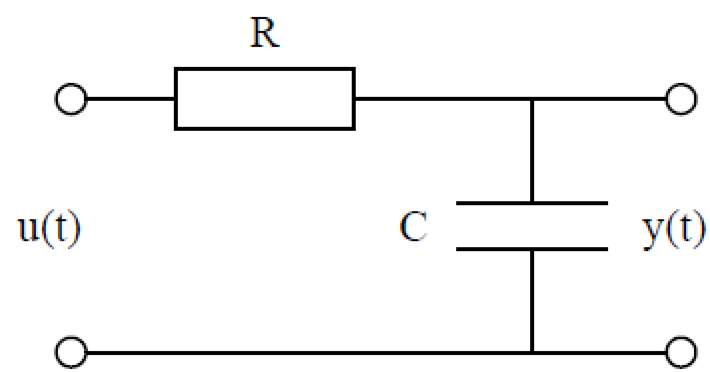
```
H=tf([2 5 1],[1 2 3]);
sgrid
pzmap(H)
```



SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

- Varios sistemas pueden ser aproximados a un primer orden





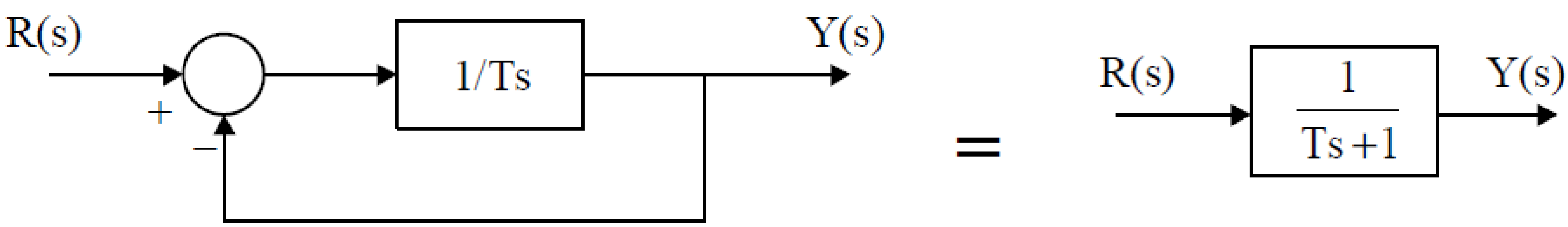
$$u(t) = Ri(t) + y(t) \quad \text{and} \quad i(t) = Cdy(t)/dt$$

$$m\frac{dy(t)}{dt} + by(t) = u(t)$$

$$RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t)$$

SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

- Un sistema de primer orden puede ser representado por el siguiente diagrama en bloques:



SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

Respuesta a una entrada paso unitario

Entrada: $R(s) = 1/s$

Respuesta (salida):

$$Y(s) = \frac{1}{s(Ts+1)}$$

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts+1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1/T}$$

$$\mathbf{y(t) = 1 - e^{-t/T}}, \quad t \geq 0.$$

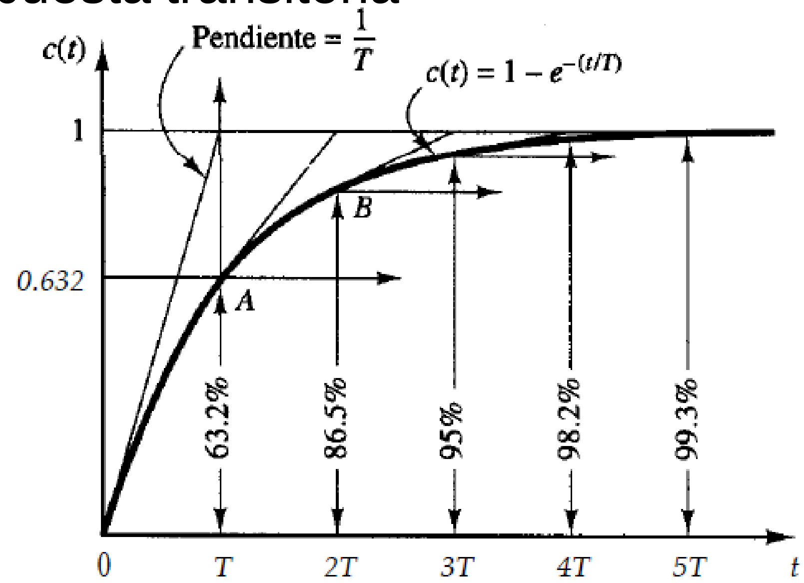
Cuál es las respuesta transitoria y_t y la respuesta en estado estacionario y_{ss}?

SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

La solución $y(t) = 1 - e^{-t/T}, \; t \geq 0.$ tiene dos partes:

- Respuesta en estado estacionario $y_{ss}(t) = 1$
- Respuesta transitoria $y_t(t) = e^{-t/T}$

T: se llama constante de tiempo y es el tiempo que le toma a la salida alcanzar el 63% de su valor final. T se puede considerar una especificación de la respuesta transitoria



Escuela Colombiana de Carreras Industriales
ECCI Escuela Tecnológica
Su Institución Universitaria

SISTEMAS DE PRIMER ORDEN

- Tiempo de subida (rise time) Tr

Es definido como el tiempo que demora la señal en ir del 10% al 90% de su valor final

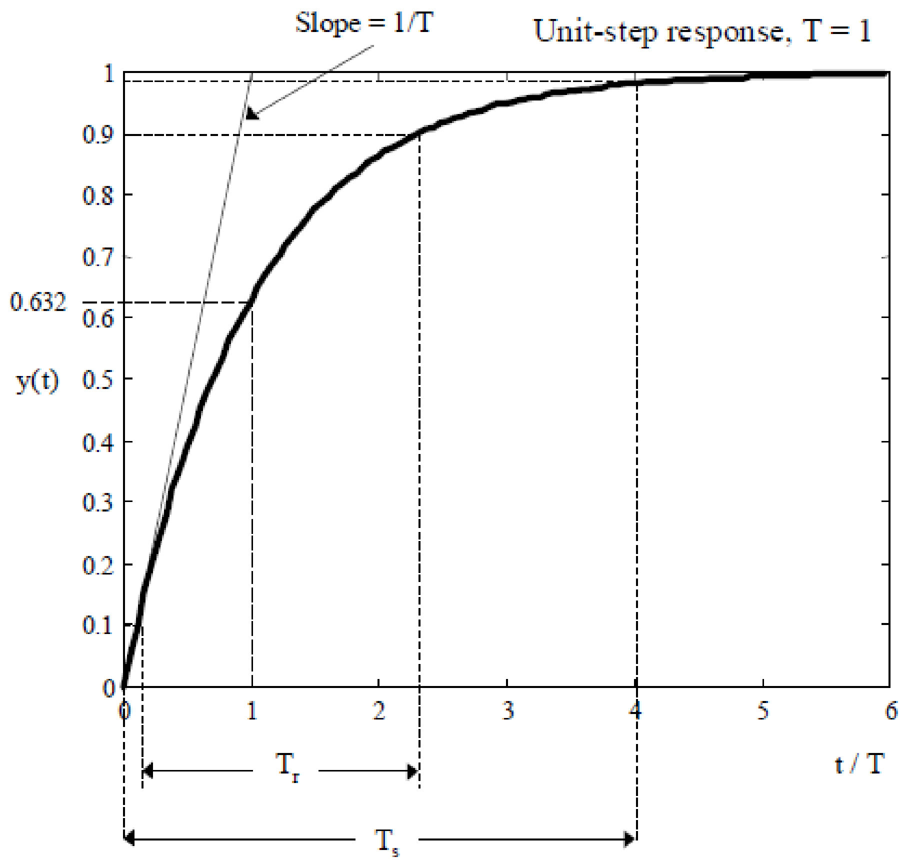
- Tiempo de establecimiento (settling time) Ts

Es el tiempo que tarda la señal en entrar y permanecer en la zona del ±5% o ±2% del valor final

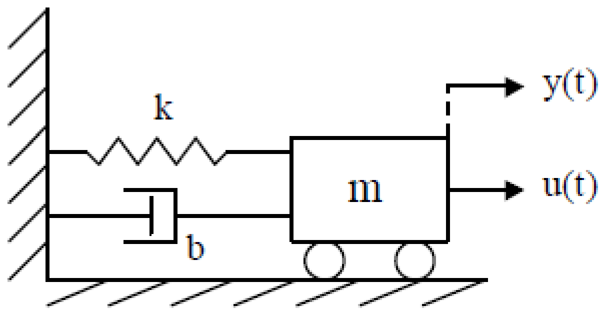
- Error en estado estacionario ess

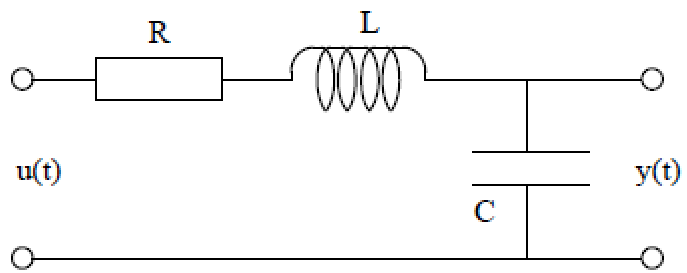
$$e(t) = r(t) - y(t) = 1 - 1 + e^{-t/T} = e^{-t/T}$$

$$e_{ss} = e(\infty) = \lim_{t\to\infty}[r(t) - y(t)] = 0$$



SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN





$$\sum \text{force} = ma$$

$$m\frac{d^2y(t)}{dt^2} + b\frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = u(t)$$

m: masa

k: constante del resorte

b: coeficiente de rozamiento

u(t): fuerza externa

y(t): desplazamiento

$$u(t) = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt} + y(t)$$

$$i(t) = L\frac{dy(t)}{dt}$$

$$LC\frac{d^2y(t)}{dt^2} + RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = u(t)$$

SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

- La forma general de un sistema de segundo orden es:

$$\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 2\zeta\omega_n \frac{dy(t)}{dt} + \omega_n^2 y(t) = k\omega_n^2 u(t)$$

- La función de transferencia

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

ω_n es la frecuencia natural

ξ es el coeficiente de amortiguamiento

k es la ganancia del sistema. Por simplicidad se estudian los casos con k=1

SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

- La solución (raíces o polos del sistema) de la ecuación característica es:

$$s_1 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1} \qquad s_2 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2 - 1}$$

- El comportamiento dinámico del sistema de segundo orden puede ser descrito en términos del factor de amortiguamiento

SISTEMAS DE SEGUNDO ORDEN

1. Si $\xi = 0$, los polos son imaginarios conjugados, el sistema se denomina **criticamente estable** y la respuesta presenta oscilaciones sostenidas

2. Si $0 < \xi < 1$, los polos son complejos y conjugados y se dice que el sistema es **subamortiguado**

3. Si $\xi = 1$, los polos son reales y repetidos y el sistema se denomina **críticamente amortiguado**

4. Si $\xi > 1$, los polos son reales y distintos y el sistema se denomina **sobreamortiguado**

Respuesta paso de sistemas de segundo orden

- Las características deseadas del comportamiento de un sistemas de segundo orden, pueden específicarse en función de la respuesta transitoria ante una entrada escalón

Respuesta paso de sistemas de segundo orden

- **Caso críticamente amortiguado $\xi = 1$**

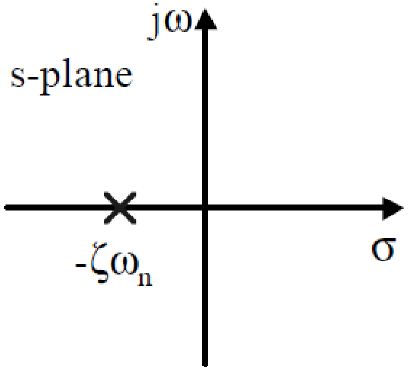
Tiene dos polos iguales: $s_1 = s_2 = -\zeta\omega_n$

Para una entrada paso unitario R(S)=1/s, la salida es:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s+\omega_n)^2}$$

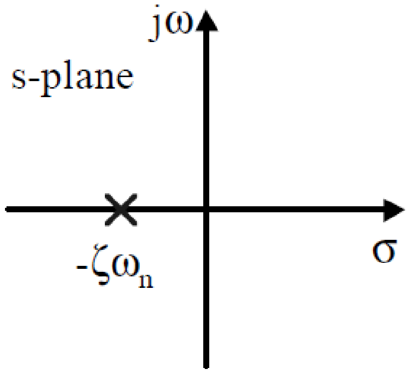
$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\omega_n} - \frac{\omega_n}{(s+\omega_n)^2}$$

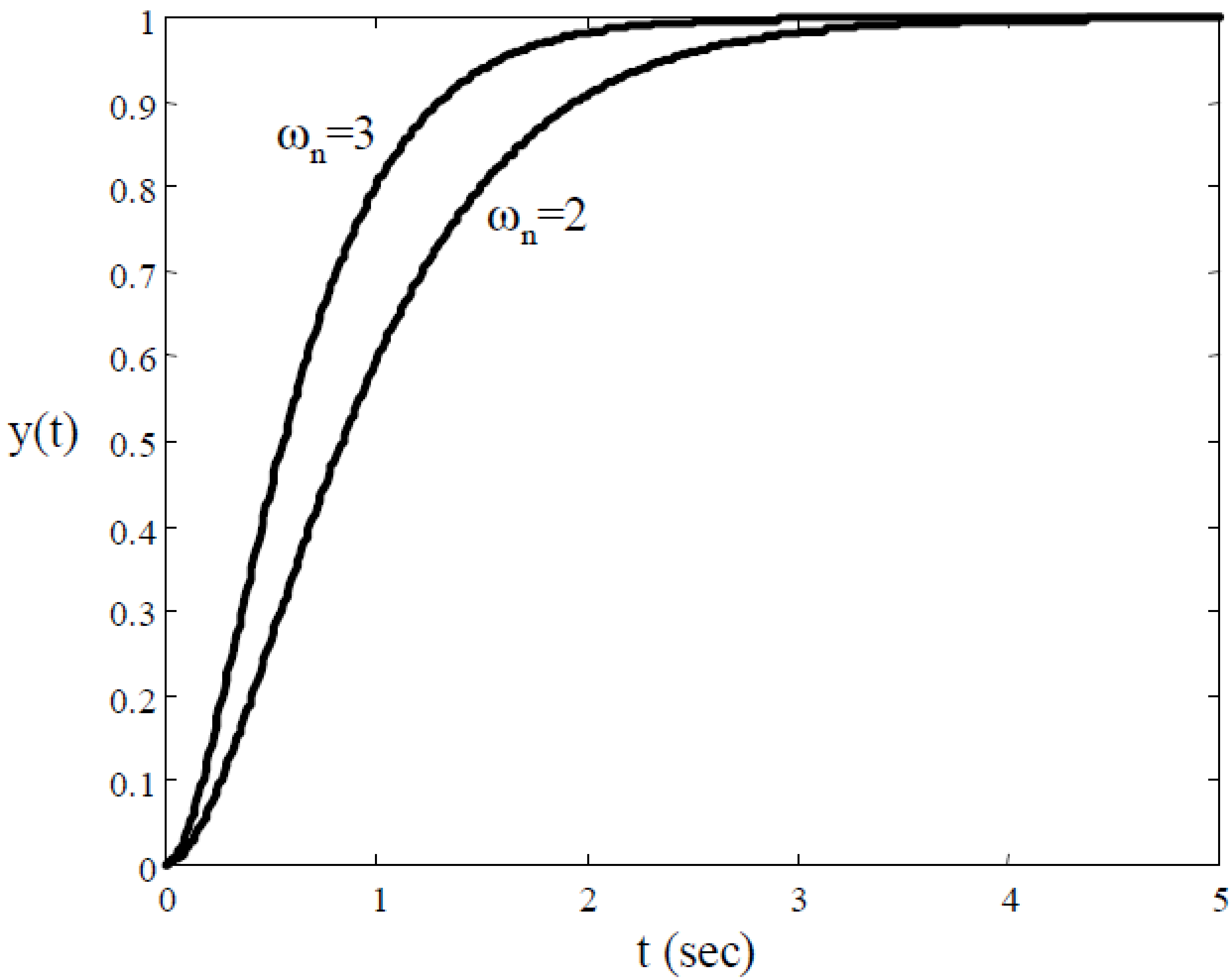
$$\mathbf{y(t) = 1 - e^{-\omega_n t}(1+\omega_n t)}$$



Respuesta paso de sistemas de segundo orden

- **Caso críticamente amortiguado $\xi = 1$**





Respuesta paso de sistemas de segundo orden

- **Caso sobreamortiguado $\xi > 1$**

Reescribiendo la función de transferencia

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s+\zeta\omega_n+\omega_n\sqrt{\zeta^2-1})(s+\zeta\omega_n-\omega_n\sqrt{\zeta^2-1})} = \frac{\omega_n^2}{(s-s_1)(s-s_2)}$$

Los dos polos del sistema son:

$$s_1 = -\zeta\omega_n - \omega_n\sqrt{\zeta^2-1} \qquad s_2 = -\zeta\omega_n + \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$$

La salida para una entrada paso es:

$$Y(s) = \frac{\omega_n^2}{s(s-s_1)(s-s_2)}$$

$$\mathbf{y(t) = 1 - \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}}\left(\frac{e^{s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{s_2 t}}{s_2}\right)}$$

Respuesta paso de sistemas de segundo orden

- **Caso sobreamortiguado $\xi > 1$**

$$y(t) = 1 - \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2 - 1}}\left(\frac{e^{s_1 t}}{s_1} - \frac{e^{s_2 t}}{s_2}\right)$$

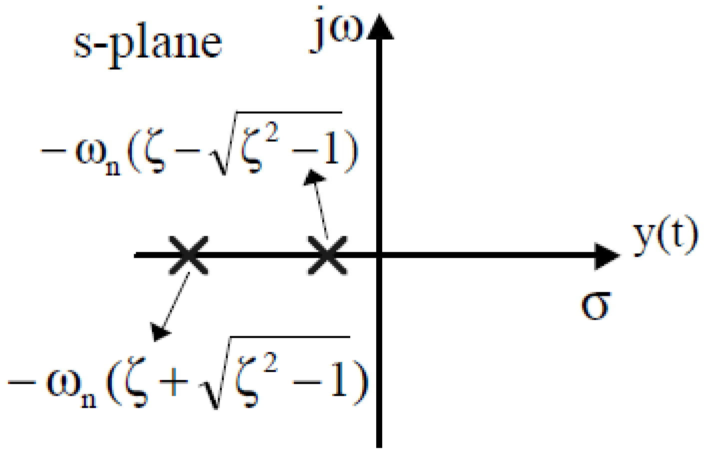
Cuando $\xi >> 1$**,** entonces $|s_1| >> |s_2|$ y la exponencial con el termino s1 decae mas rápido que con la exponencial con s2. Entonces para una solución aproximada no se debe considerar s1

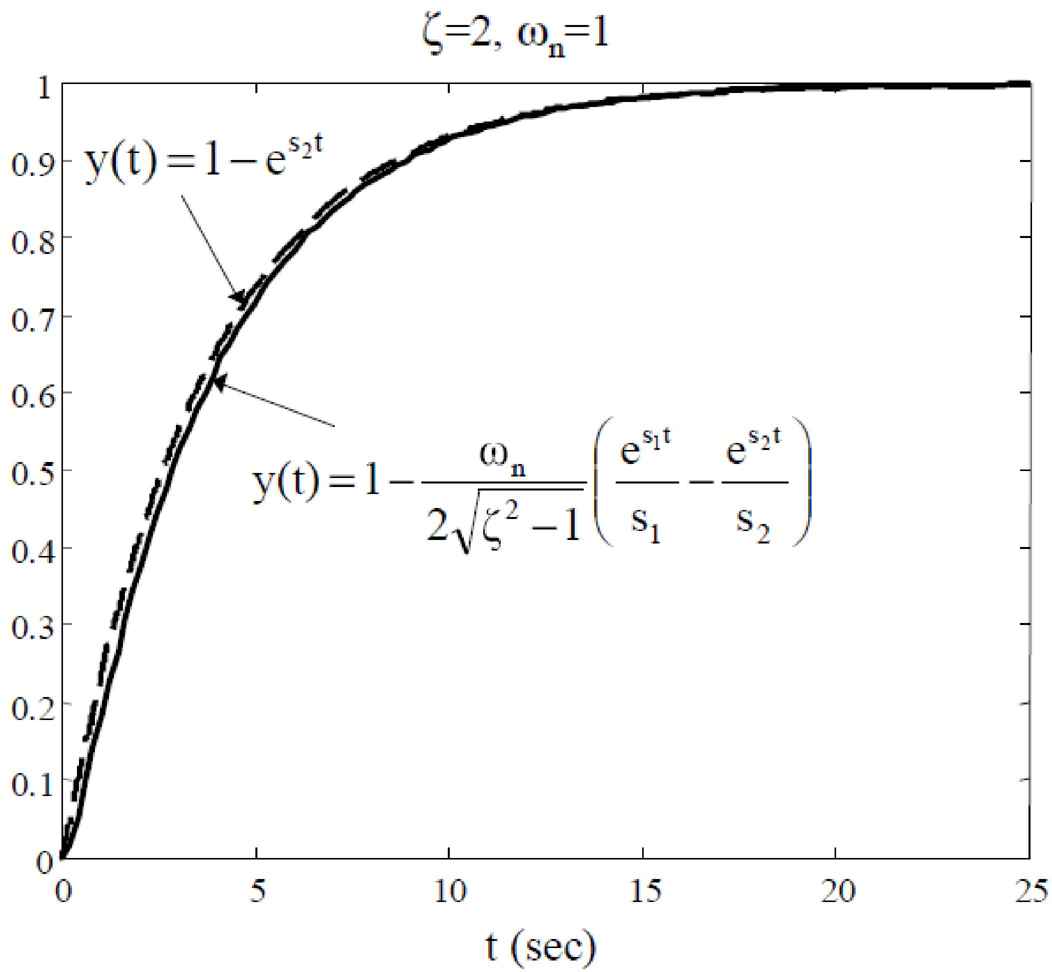
$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s - s_1)(s - s_2)} = \frac{\omega_n^2 / s_1}{(s / s_1 - 1)(s - s_2)} \overset{|s_1|>>|s_2|}{\approx} \frac{-\omega_n^2 / s_1}{s - s_2}$$

La respuesta en tiempo a un paso es:

$$y(t) = 1 - e^{-\omega_n(\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1})t}, \quad t \geq 0$$

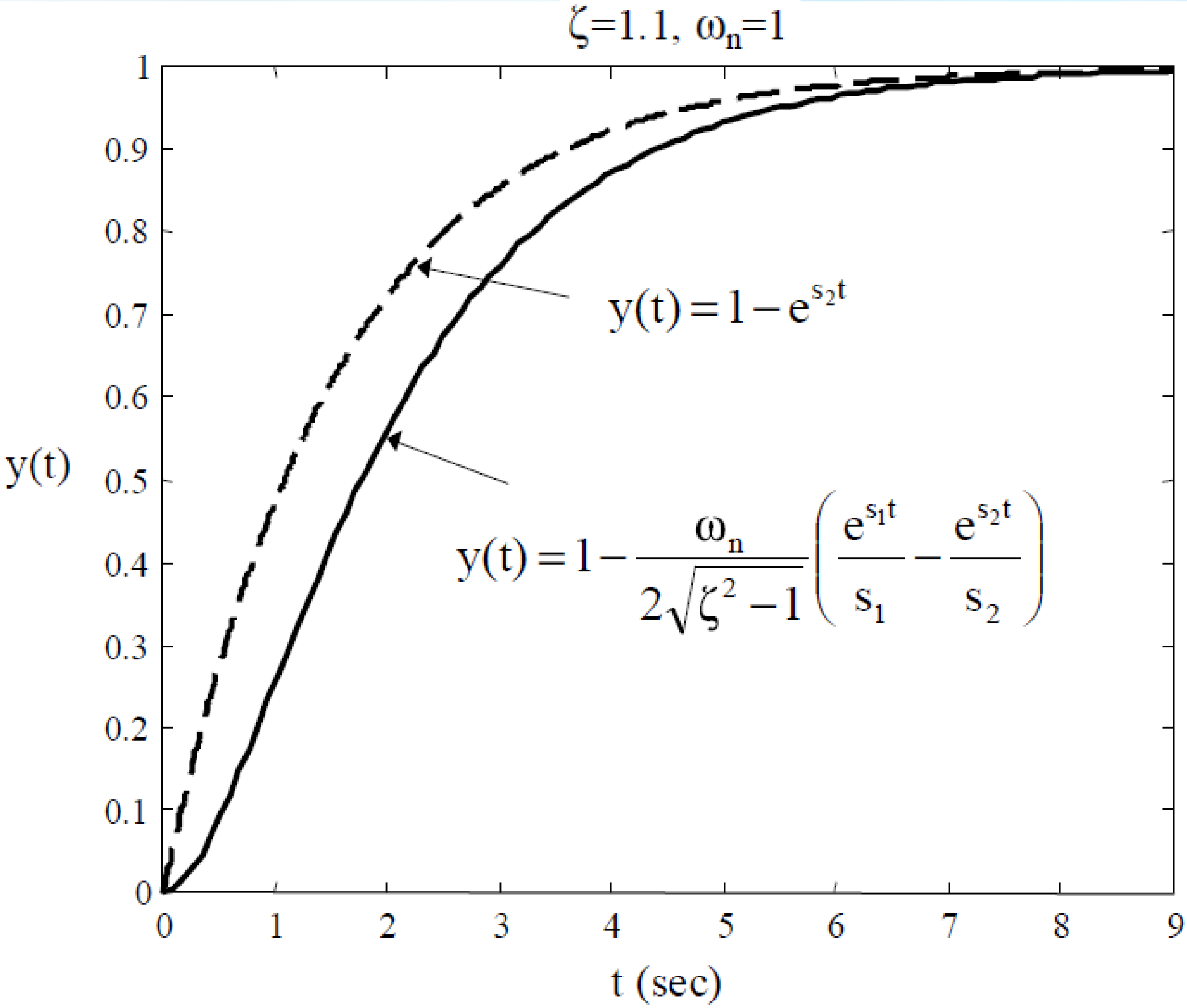
Respuesta paso de sistemas de segundo orden





$\zeta \gg 1$, s_1 si puede ser omitido

Respuesta paso de sistemas de segundo orden



$\zeta \approx 1$, s_1 No puede ser omitido

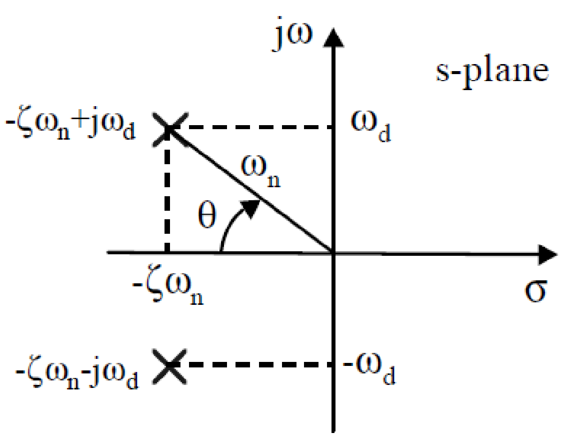
Respuesta paso de sistemas de segundo orden

Caso subamortiguado $0 < \xi < 1$

- Función de transferencia: $$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{\omega_n^2}{(s+\zeta\omega_n + j\omega_d)(s+\zeta\omega_n - j\omega_d)}$$

Donde $\omega_d = \omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ es la frecuencia natural de amortiguamiento

- Los dos polos son: $s_1 = -\zeta\omega_n - j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$ and $s_2 = -\zeta\omega_n + j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}$



$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

$$\zeta = \cos(\theta)$$

Respuesta paso de sistemas de segundo orden

- **Caso subamortiguado $0 < \xi < 1$**

La salida a una entrada paso es

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{s + 2\zeta\omega_n}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{1}{s} - \frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2} - \frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s + \zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}\right\} = e^{-\zeta\omega_n t}\cos(\omega_d t) \qquad \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{\zeta\omega_n}{(s + \zeta\omega_n)^2 + \omega_d^2}\right\} = e^{-\zeta\omega_n t}\sin(\omega_d t)$$

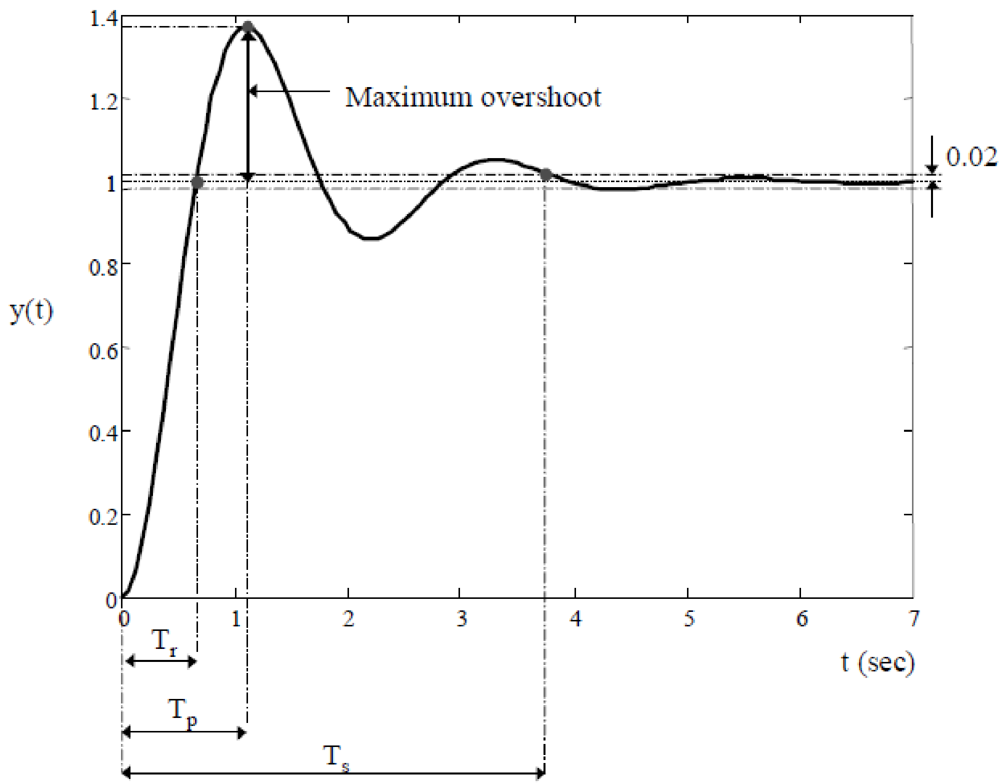
$$y(t) = 1 - e^{-\zeta\omega_n t}\left(\cos(\omega_d t) + \frac{\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t)\right)$$

$$= 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\sin(\omega_d t + \theta) \qquad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

Respuesta paso de sistemas de segundo orden

- **Caso subamortiguado $0 < \xi < 1$**

$\zeta=0.9,\ \omega_n=3$



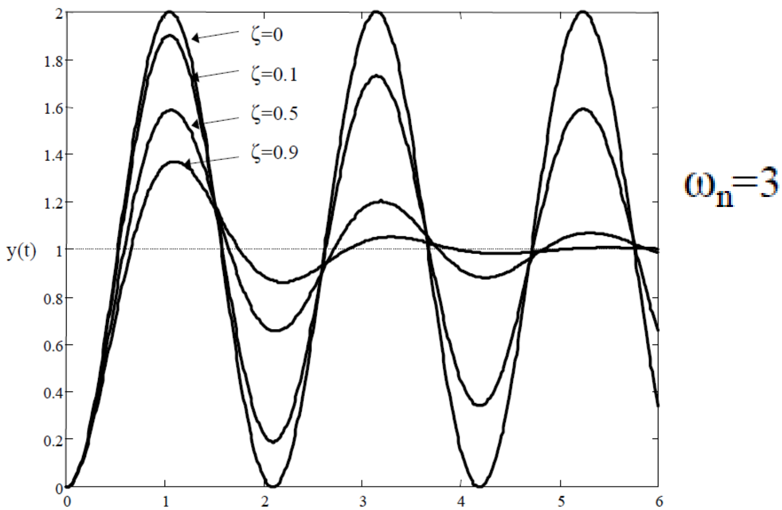
Respuesta paso de sistemas de segundo orden

- **Caso respuesta oscilatoria $\xi = 0$**

La Existencia de dos polos imaginarios conjugados hace la respuesta no se estabilice y mantenga una oscilación de forma indefinida

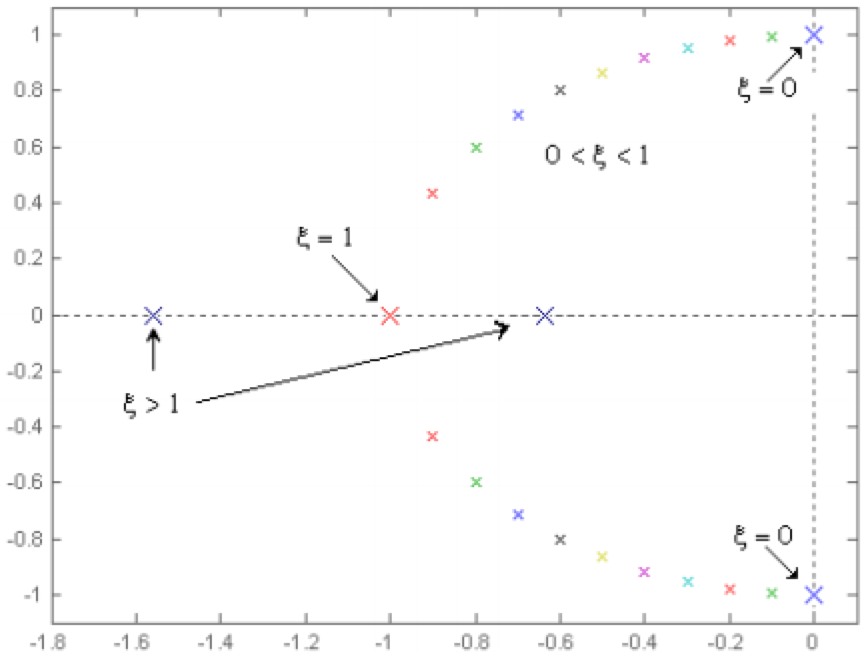
La respuesta comienza a oscilar a una frecuencia natural de oscilación

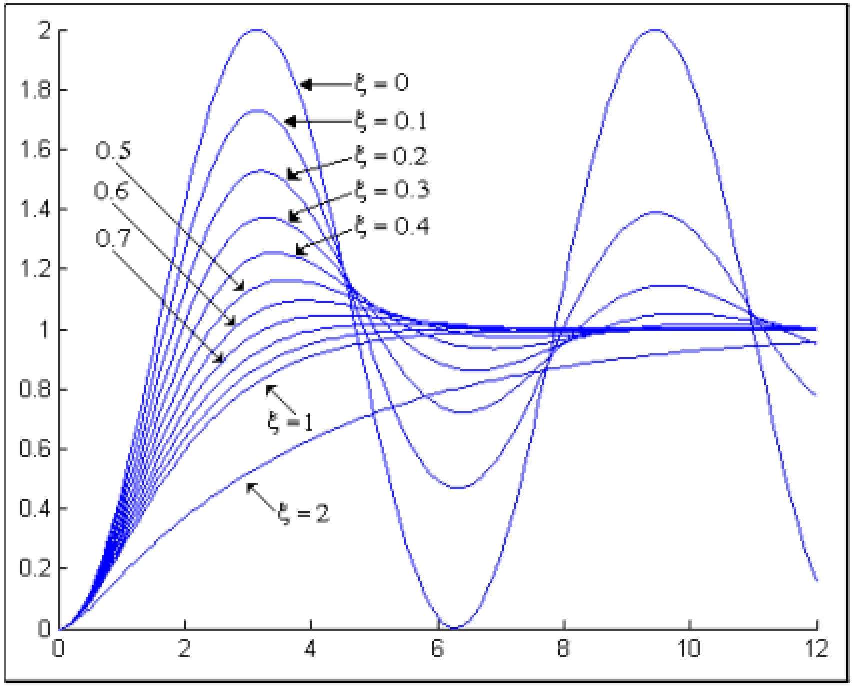
$$y(t) = 1 - \cos(\omega_n t)$$



Respuesta paso de sistemas de segundo orden

- **Resumen:**





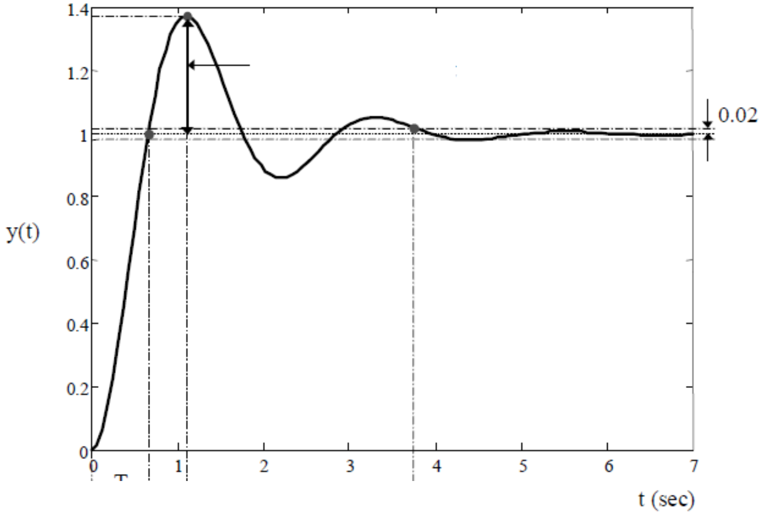
Especificaciones de respuesta transitoria.

- Con frecuencia, las características de desempeño de un sistema de control se **especifican en términos de la respuesta transitoria para una entrada escalón unitario**, dado que ésta es fácil de generar y es suficientemente drástica

Especificaciones de respuesta transitoria.

- La respuesta transitoria de un sistema de control práctico exhibe con frecuencia oscilaciones amortiguadas antes de alcanzar el estado estable

- *Cuáles son las características de la respuesta transitoria?*

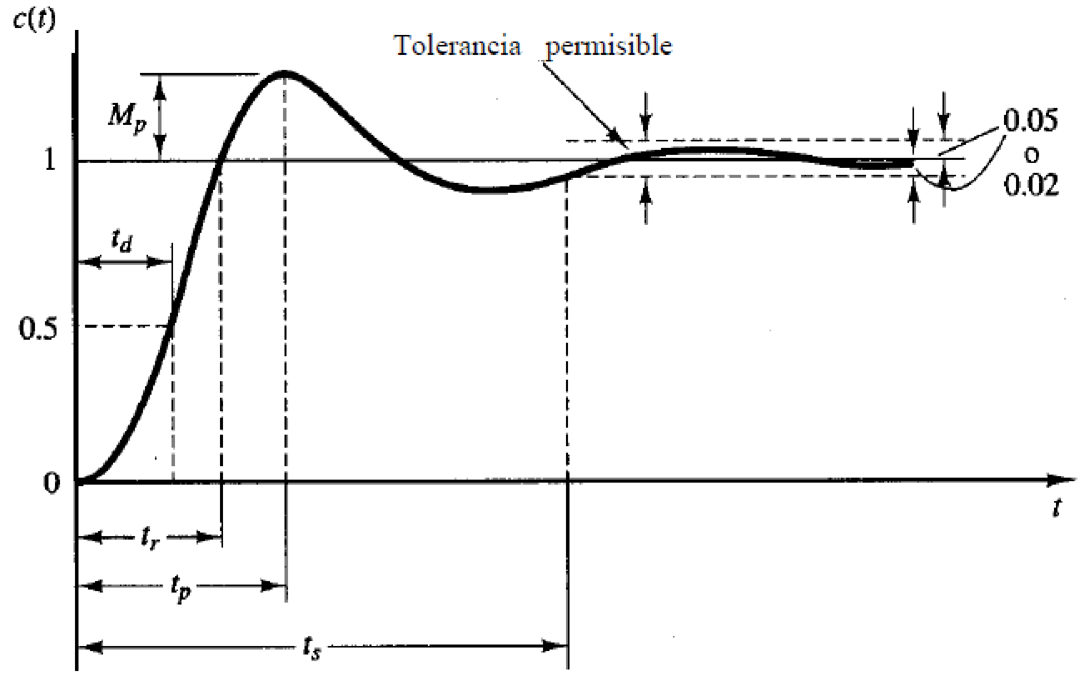


Especificaciones de respuesta transitoria.

- La respuesta transitoria de un sistema de control práctico exhibe con frecuencia oscilaciones amortiguadas antes de alcanzar el estado estable

- Características de la respuesta transitoria
  - Tiempo de retardo, t_d
  - Tiempo de levantamiento, t_r
  - Tiempo pico, t_p
  - Sobrepaso máximo, M_p
  - Tiempo de asentamiento, t_s

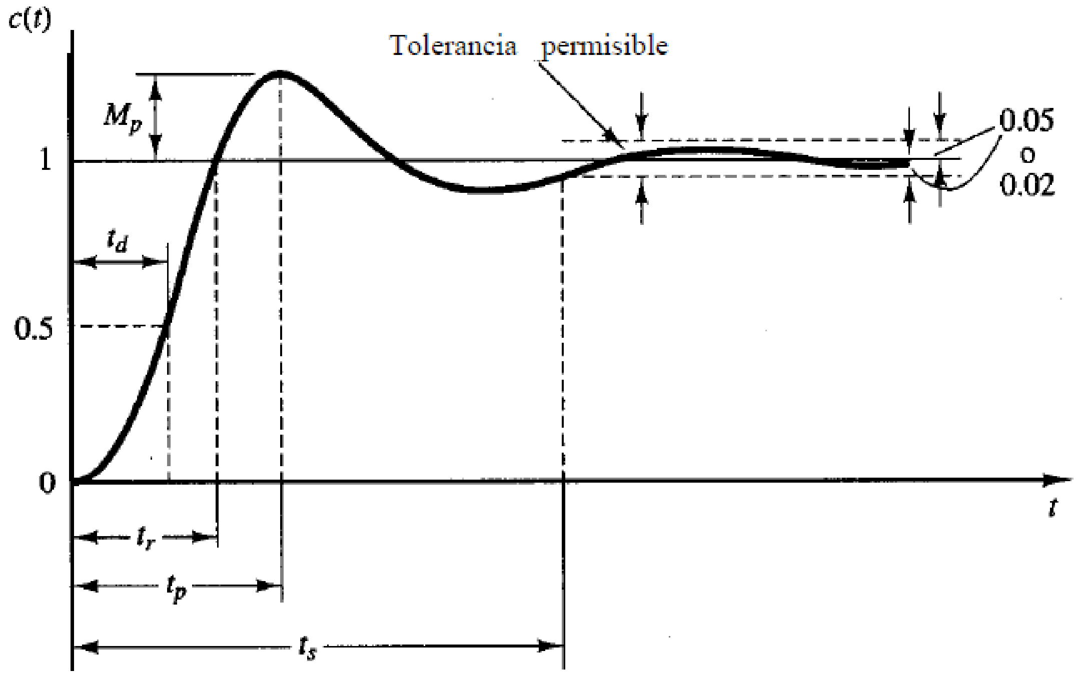
Especificaciones de respuesta transitoria sistemas 2do orden



- **Tiempo de retardo, t_d**

Es el tiempo requerido para que la respuesta alcance la primera vez la mitad del valor final

Especificaciones de respuesta transitoria sistemas 2do orden

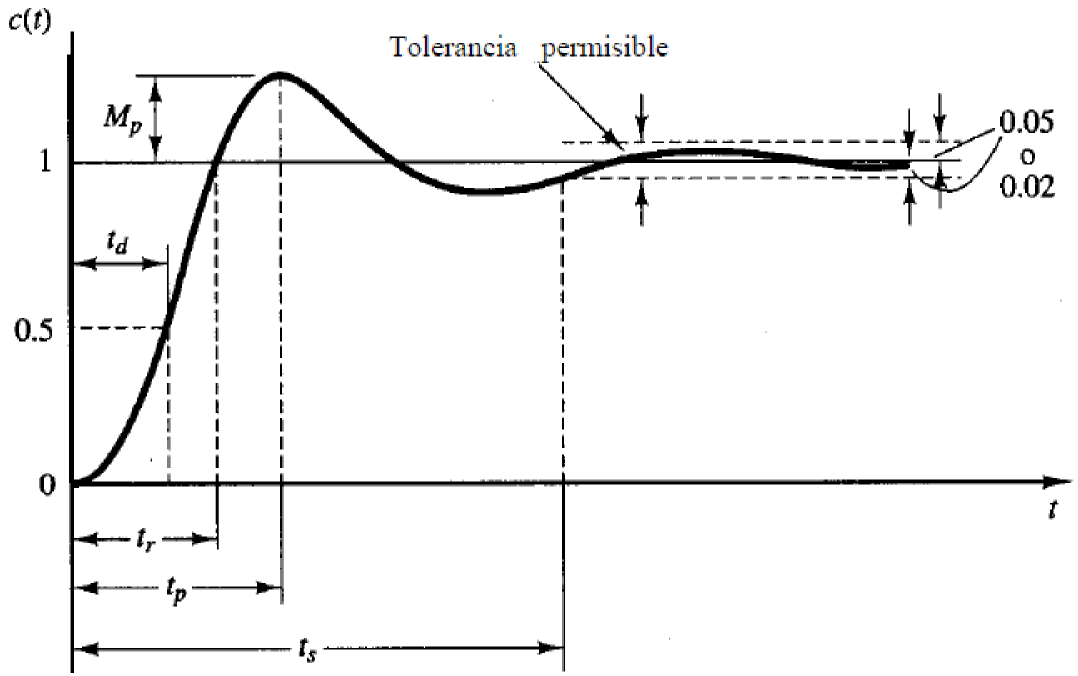


- **Tiempo de levantamiento, t_r**

Es el tiempo requerido para que la respuesta pase del 10 al 90% (sistemas sobreamortiguados) o del 0 al 100% (subamortiguados) de su valor final.

$$T_r = \frac{\pi - \theta}{\omega_d} = \frac{\pi - \tan^{-1}(\sqrt{1-\zeta^2}/\zeta)}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$$

Especificaciones de respuesta transitoria sistemas 2do orden

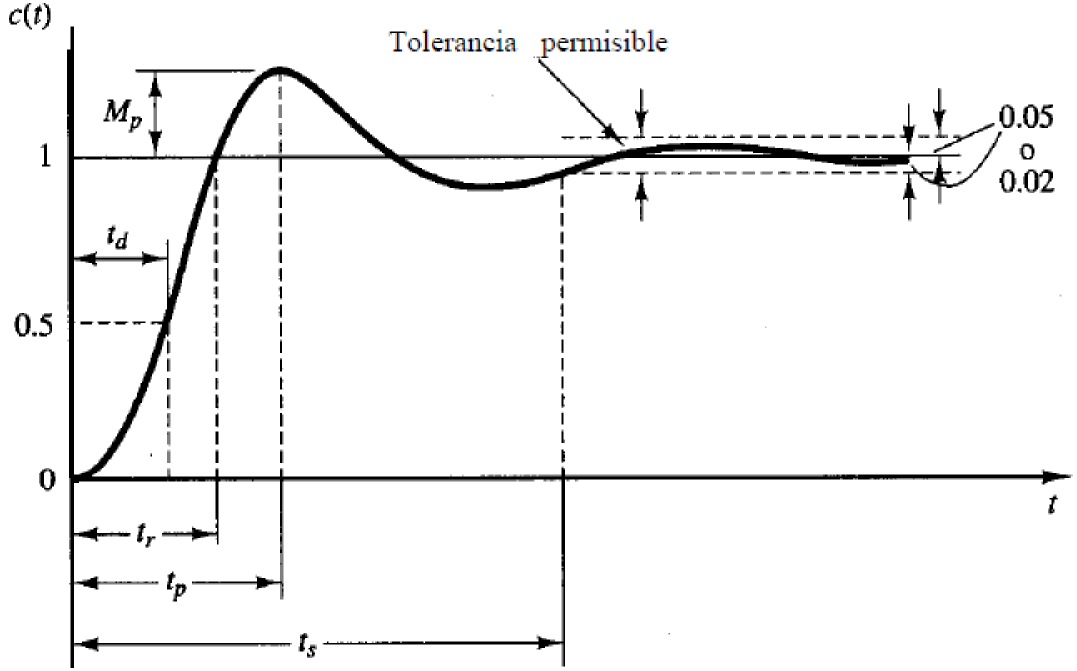


- **Tiempo pico, t_p**

Es el tiempo requerido para que la respuesta alcance el primer pico del sobrepaso

$$T_p = \frac{\pi}{\omega_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

Especificaciones de respuesta transitoria sistemas 2do orden

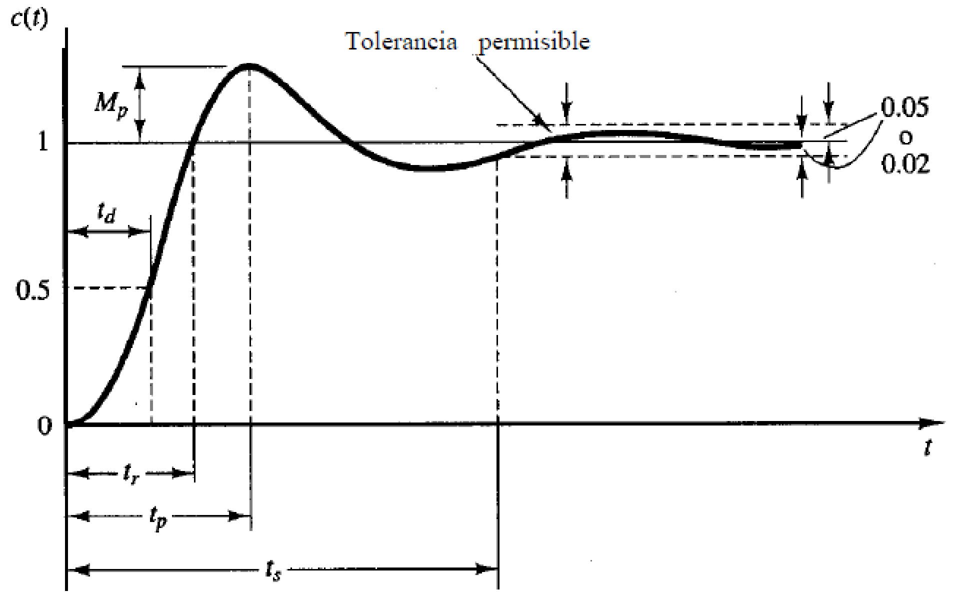


- **Sobrepaso máximo (porcentaje), M_p**

Es el valor pico máximo de la curva de respuesta, medido a partir de la unidad.

$$\text{PO}\,(\textit{percent overshoot}) = \frac{y_{max} - y_{ss}}{y_{ss}} \times 100\% = 100\exp\left(\frac{-\zeta\pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}\right)$$

Especificaciones de respuesta transitoria sistemas 2do orden

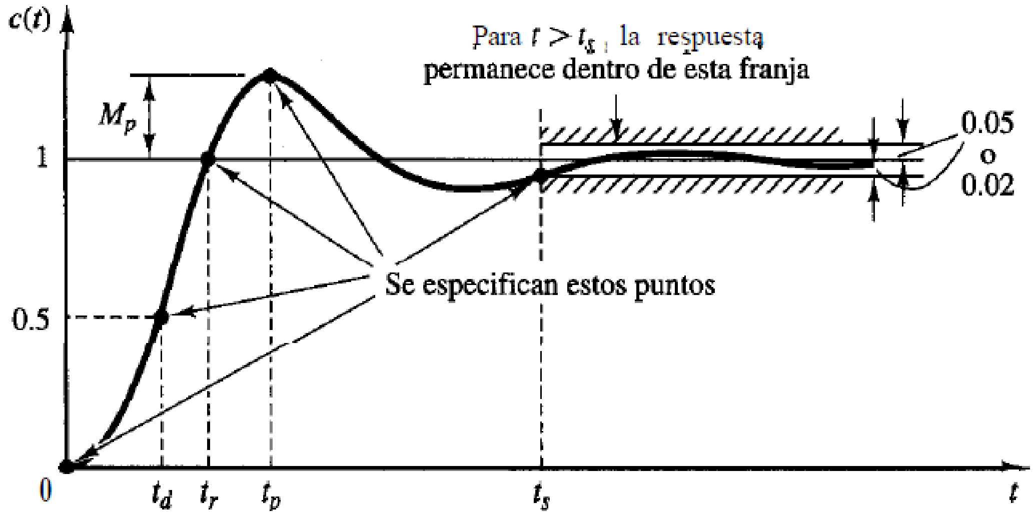


- **Tiempo de asentamiento, t_s**

Es el tiempo que se requiere para que la curva de respuesta alcance un rango alrededor del valor final del tamaño especificado por el porcentaje absoluto del valor final (por lo general, de 2 a 5%) y permanezcadentro de él.

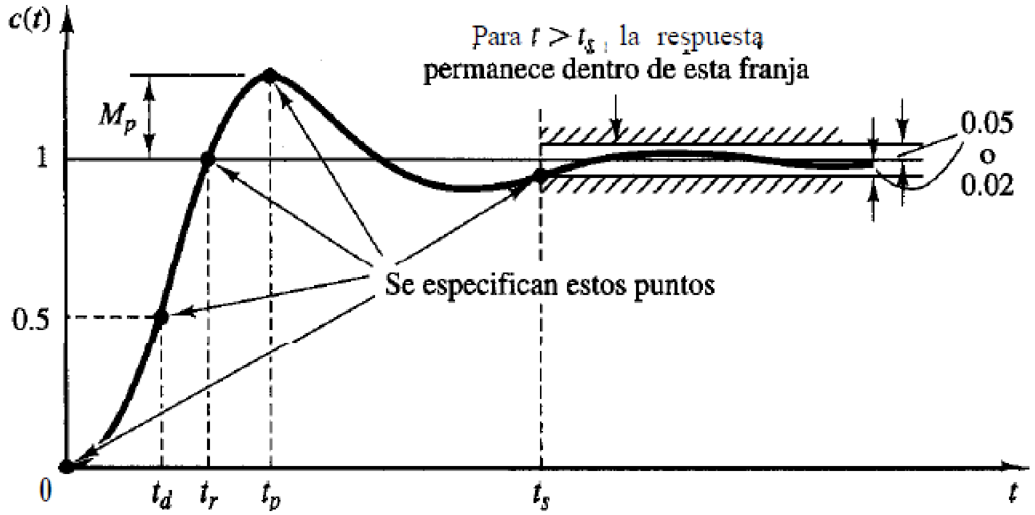
$$2\% : T_s \approx \frac{4}{\zeta\omega_n} \qquad 5\% : T_s \approx \frac{3}{\zeta\omega_n}$$

Especificaciones de respuesta transitoria sistemas 2do orden



Es conveniente que la **respuesta transitoria sea suficientemente rápida y amortiguada**. Por tanto, para una respuesta transitoria conveniente de un sistema de segundo orden, **el factor de amortiguamiento relativo debe estar entre 0.4 y 0.8**.

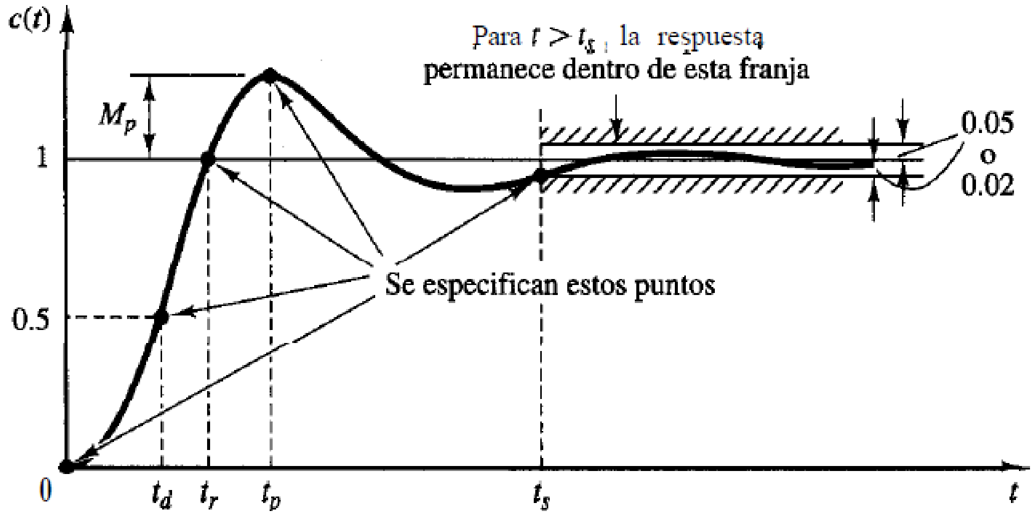
Especificaciones de respuesta transitoria sistemas 2do orden



- Qué pasa con la respuesta si se tiene valores pequeños de ξ $(0<\xi < 0.4)$?

- Qué pasa con la respuesta si se tiene un valor grande de ξ $(\xi > 0.8)$?

Especificaciones de respuesta transitoria sistemas 2do orden



- Valores pequeños de ξ (ξ < 0.4) producen un valor de **sobrepaso excesivo** en la respuesta transitoria
- Un sistema con un valor grande de ξ (ξ > 0.8) **responden con lentitud**.

Análisis de la respuesta transitoria con Matlab

- Se puede calcular y graficar la respuesta en tiempo de un sistema a través de herramientas CAD como **Matlab y Simulink**.

- En particular, se considerará la respuesta paso, la respuesta impulso, la respuesta rampa y la respuesta de otras entradas simples.

Respuesta Paso unitario

- Para graficar la respuesta a un paso unitario de un sistema LTI `SYS=tf(num,den)` en MATLAB, se usa el comando `step(SYS)` o `step(num,den)`

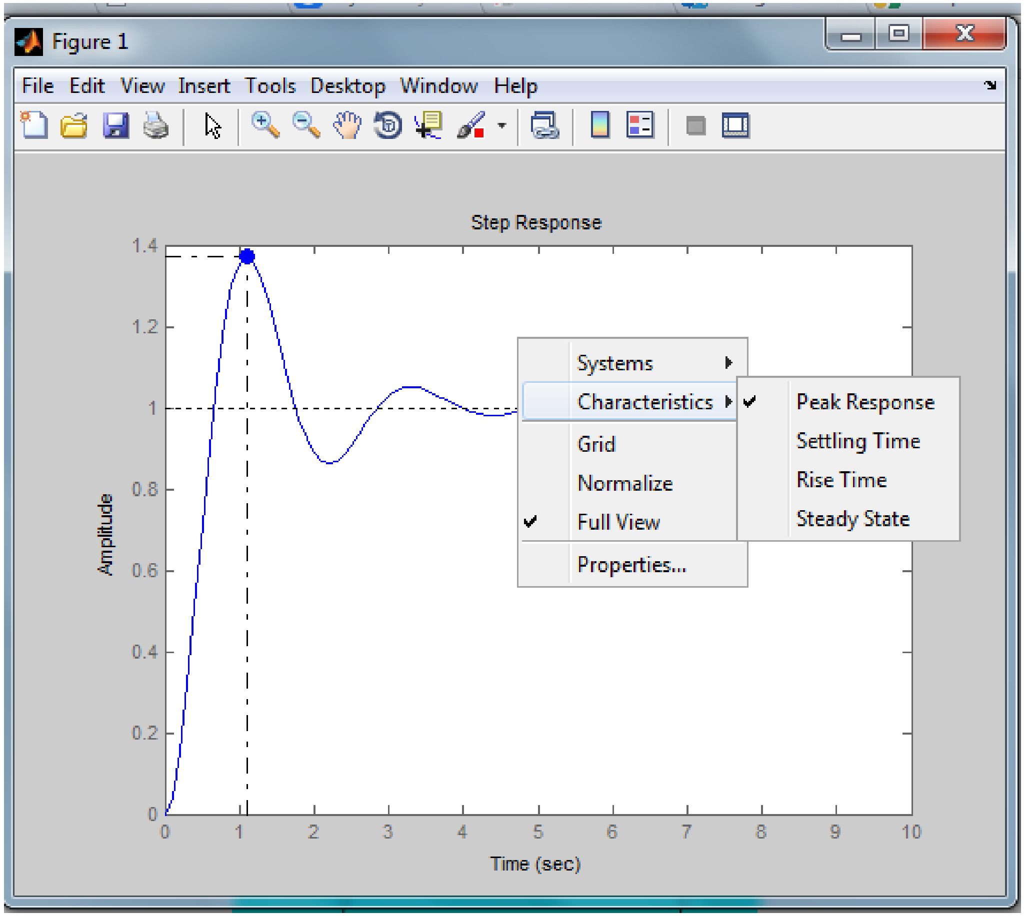
- Para una entrada paso de magnitud diferente a la unidad, por ejemplo K, simplemente se multiplica la función de trasferencia SYS por la constante K: `step(K*SYS).`

- Si se quiere graficar en un rango de tiempo específico se debe definir un vector t con el rango de tiempo. Por ejemplo:`t = 0:0.1:10; step(SYS,t)`

Respuesta Paso unitario

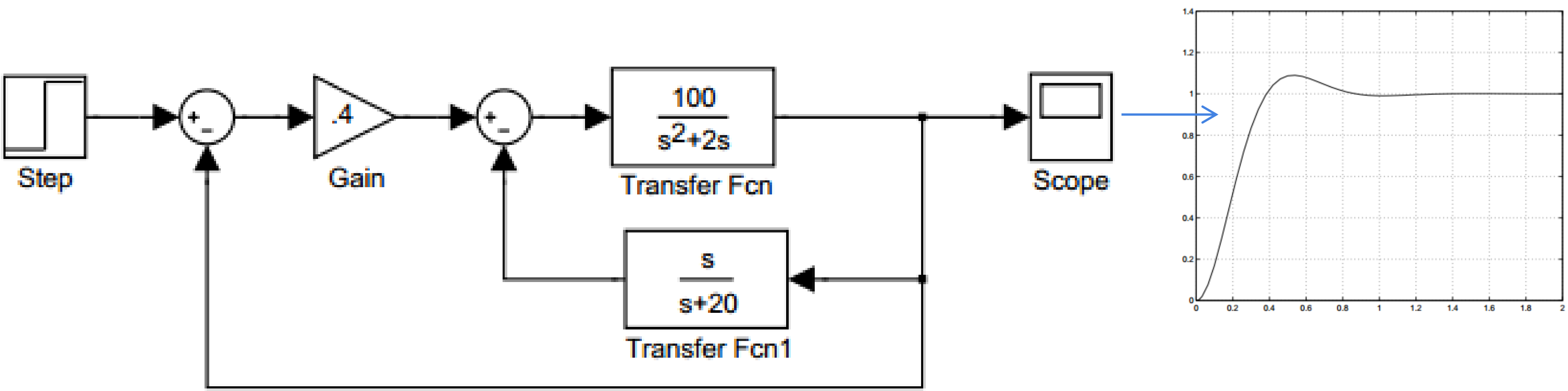
Ejemplo: sistema de 2do orden amortiguado

```
wn=3;
z=0.3;
wd=wn*sqrt(1-z^2);
s=tf('s');
G=
wn^2/((s+z*wn+1i*wd)*
(s+z*wn-1i*wd));
t=0:0.1:10;
step(G,t)
```



Respuesta Paso unitario

- Desde Simulink



Escuela Colombiana de Carreras Industriales ECCI Escuela Tecnológica Su Institución Universitaria

Respuesta impulso

- Para graficar la respuesta impulso de un sistema LTI `SYS=tf(num,den)` en MATLAB, se usa el comando `impulse(SYS)` o `impulse(num,den)`

Respuesta impulso

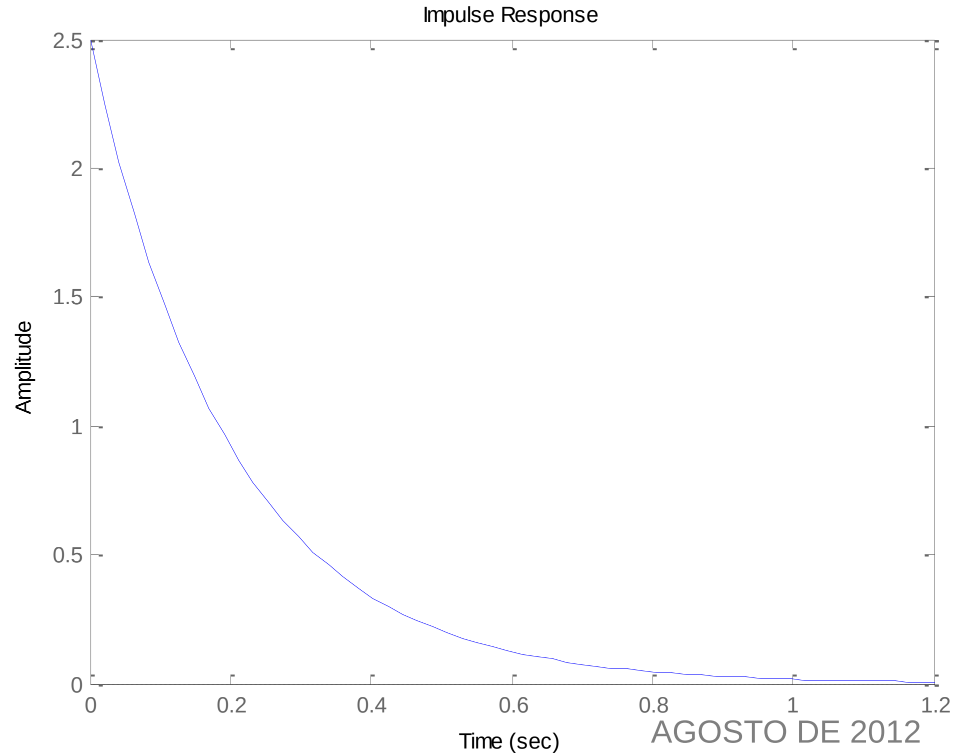
- Por ejemplo: graficar la respuesta impulso para el siguiente sistema

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{5}{2s+10}$$

```
num = [0 5];
den = [2 10];
SYS = tf(num,den);
impulse(SYS)
```

O directamente

```
impulse(num,den)
```



Respuesta rampa

- Matlab no tiene un comando para la respuesta rampa. Para obtener la respuesta a una rampa unitaria de la función de trasferencia G(s) se debe:
  1. Multiplicar la función de transferencia G(s) por 1/s
  2. Usar la función resultante con el comando **step**

Respuesta rampa

- Por ejemplo: graficar la respuesta rampa para el siguiente sistema

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{1}{s^2 + s + 1}$$

- Con una entrada rampa unitaria R(s)=1/s^2

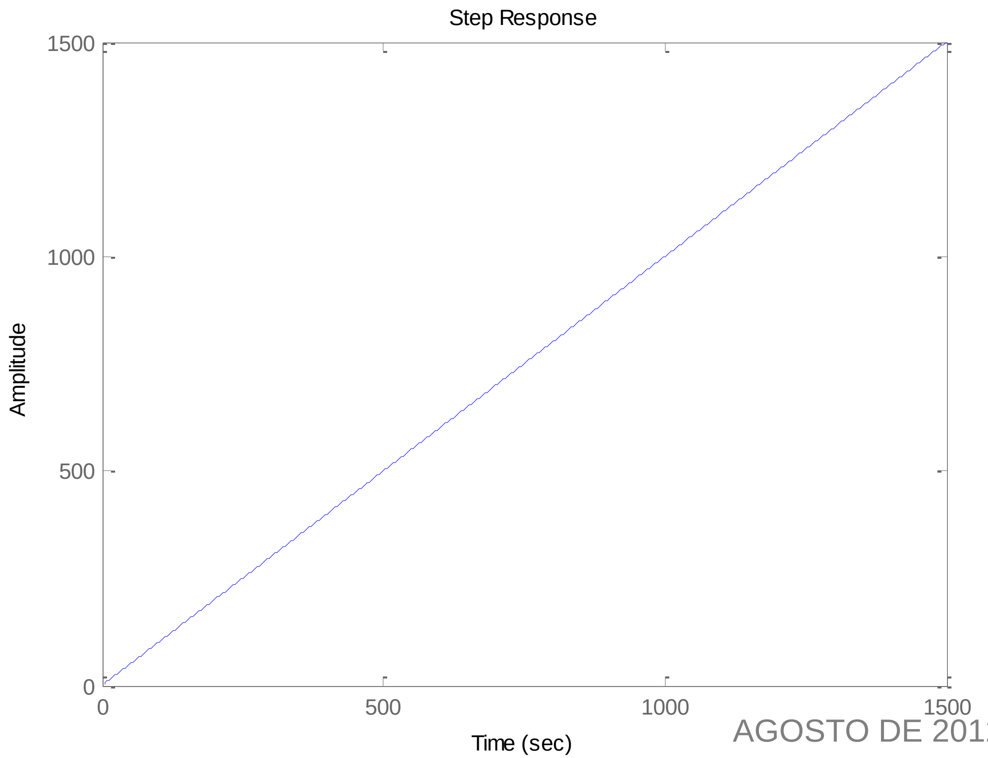
$$Y(s) = \frac{1}{s^2 + s + 1} R(s) = \frac{1}{(s^2 + s + 1)s} \cdot \frac{1}{s}$$

$$= \left[\frac{1}{s^3 + s^2 + s}\right] \cdot \frac{1}{s}$$

Respuesta rampa

- Tomando los coeficientes de la expresión en corchetes:

```
num = [0 0 0 1];
den = [1 1 1 0];
step(num,den)
```



Respuesta arbitraria

- Para obtener la respuesta en tiempo de un sistema LTI `SYS=tf(num,den)` de una entrada arbitraria por ejemplo: función exponencial, función sinosoidal en MATLAB, se usa el comando `lsim`

```
lsim(SYS,r,t) o lsim(num,den,r,t)
```

Donde r es la función de entrada en tiempo y t es el rango de tiempo en que está definida la función r

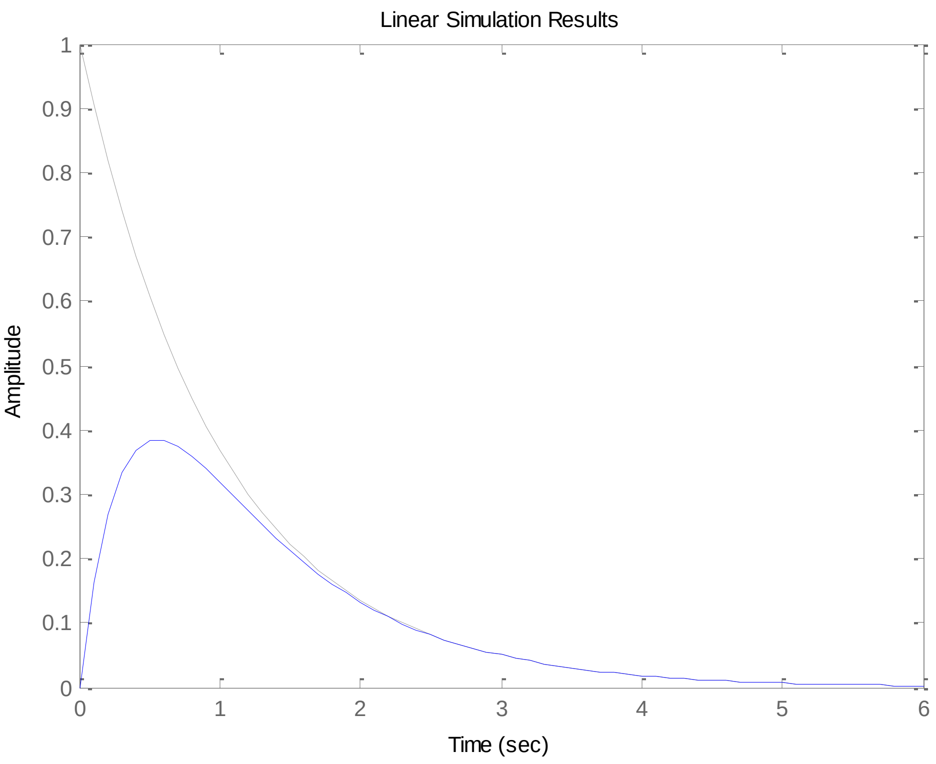
Respuesta arbitraria

- Por ejemplo: graficar la respuesta para el siguiente sistema

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{2}{s+3}$$

Para la entrada $r = e^{-t}$.

```
num = [0 2];
den = [1 3];
t = 0:0.1:6;
r = exp(-t);
lsim(num,den,r,t)
```



Efecto de añadir polos y ceros a las funciones de transferencia.

- Dado un sistema en lazo cerrado, sus polos determinan las características básicas de su respuesta transitoria.

- Habitualmente, lo que se desea es poder ajustar los polos y ceros del sistema en lazo abierto, para situar los del lazo cerrado en la posición más interesante para nuestros propósitos

Efecto de añadir polos y ceros a las funciones de transferencia.

- *Adición de un **polo** en la función de transferencia de **trayectoria directa** (Sistemas con realimentación unitaria).*

$$G(s)=\frac{w_n^2}{s(s+2\xi w_n)} \quad \xrightarrow{\text{Anadir un polo}} \quad G'(s)=\frac{w_n^2}{s(s+2\xi w_n)\boxed{(1+T_p s)}}$$

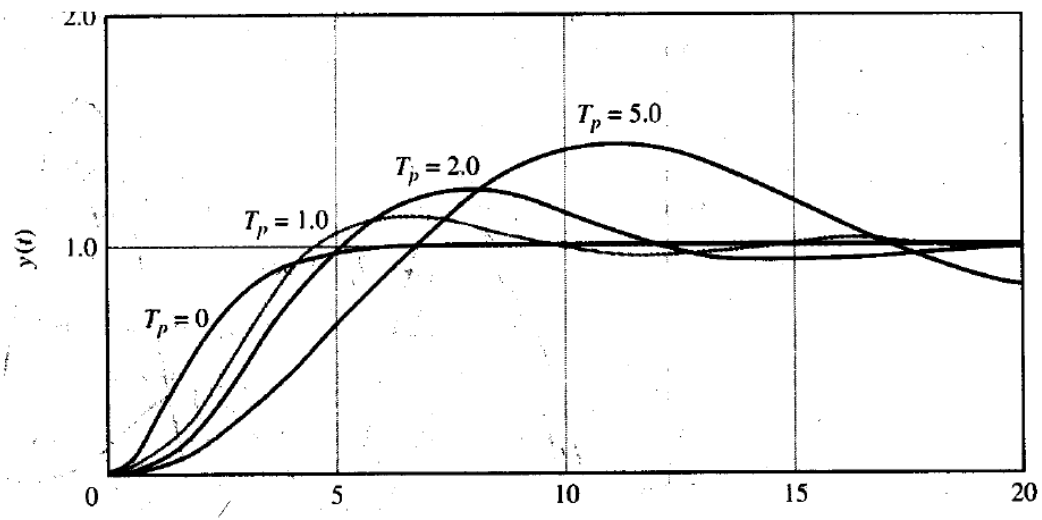
Se considera que se ha añadido el polo en s = -1/Tp. La función de transferencia en lazo cerrado será:

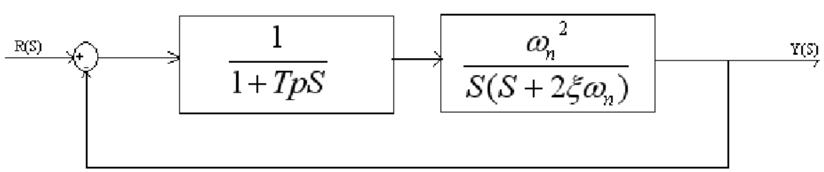
$$T(s)=\frac{G'(s)}{1+G'(s)}=\frac{w_n^2}{T_p s^3+(1+2\xi w_n T_p)s^2+2\xi w_n s+w_n^2}$$

Escuela Colombiana de Carreras Industriales ECCI Escuela Tecnológica Su Institución Universitaria

Efecto de añadir polos y ceros a las funciones de transferencia.

- La adición de un **polo** a una función de transferencia de **trayectoria directa** o *con realimentación unitaria* tiene generalmente el efecto de **incrementar el sobrepaso máximo** del sistema en lazo cerrado





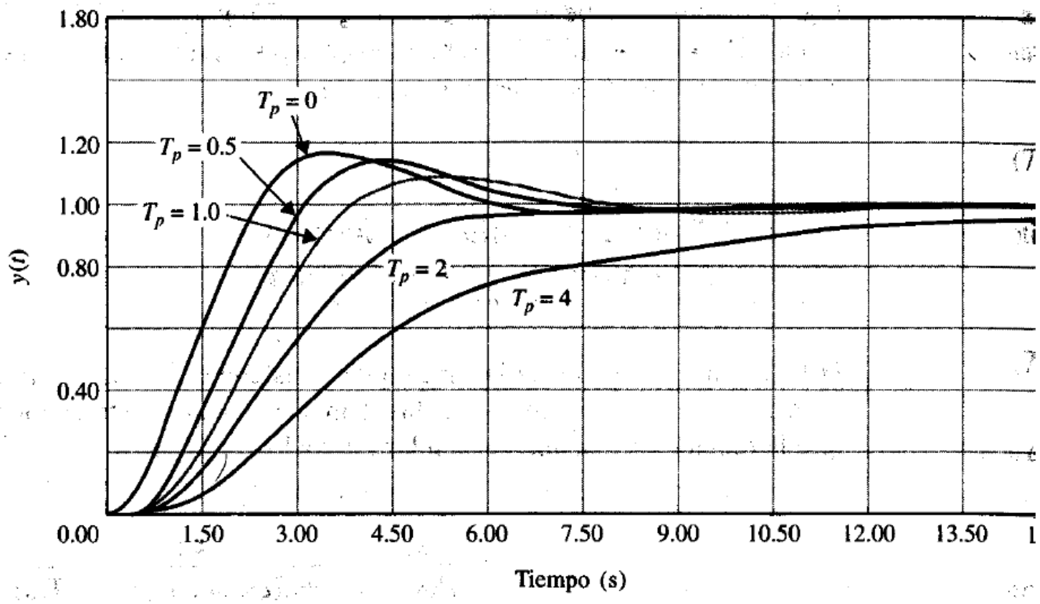
$W_n = 1; \xi = 1.$

Efecto de añadir polos y ceros a las funciones de transferencia.

- *Adición de un **polo** en la función de transferencia de **lazo cerrado**.*

$$T(s) = \frac{w_n^2}{(s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2)\boxed{(1 + T_p s)}}$$

$w_n = 1;\ \xi = 0.5$



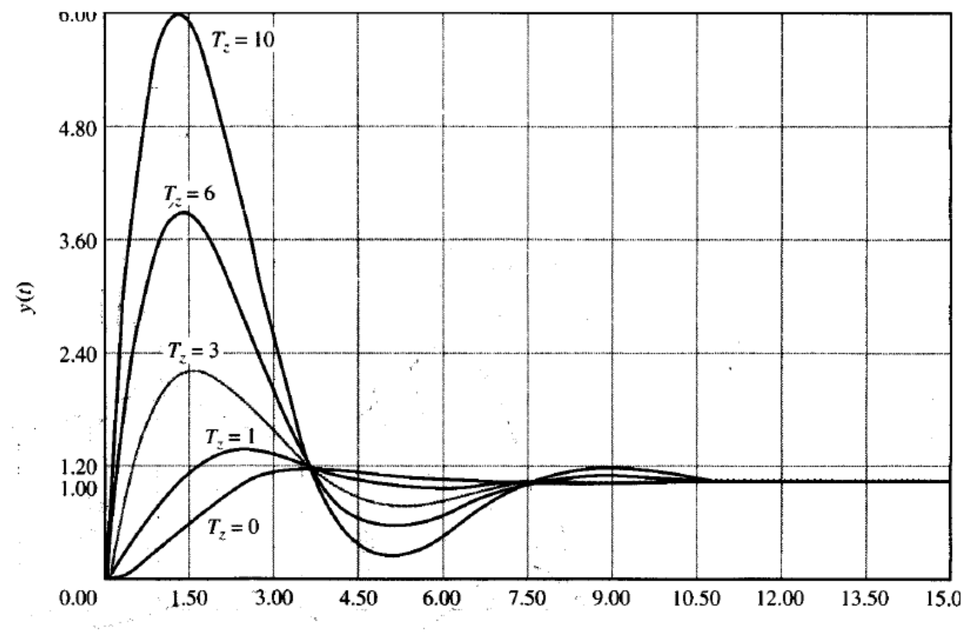
- El **tiempo de establecimiento se incrementa** y el **sobreimpulso máximo decrece**

Efecto de añadir polos y ceros a las funciones de transferencia.

- *Adición de un **cero** en la función de transferencia de **lazo cerrado**.*

$$T(s) = \frac{w_n^2 \boxed{(1+T_z s)}}{(s^2 + 2\xi w_n s + w_n^2)}$$

$w_n = 1;\ \xi = 0.5$



Adicionar un cero en la función de transferencia en lazo cerrado **disminuye el tiempo de subida** e **incrementa el tiempo de sobreimpulso máximo** de la respuesta al escalón

Efecto de añadir polos y ceros a las funciones de transferencia.

- *Adición de un **cero** en la función de transferencia de la **trayectoria directa** (Sistemas con realimentación unitaria).*

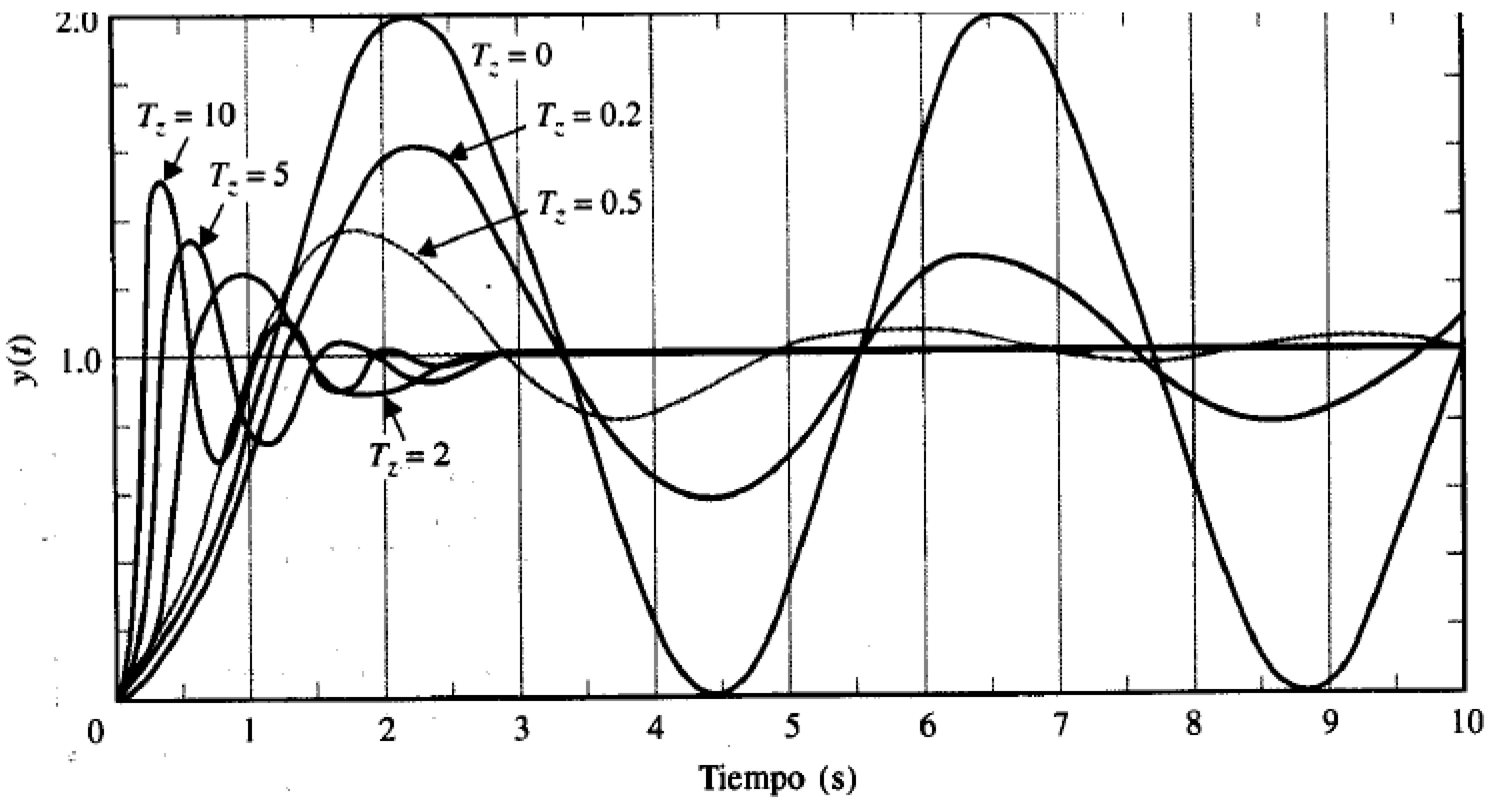
$$G(s) = \frac{6\boxed{(1+T_z s)}}{s(s+1)(s+2)}$$

Función de transferencia de lazo cerrado

$$T(s) = \frac{6(1+T_z s)}{s^3 + 3s^2 + (2+6T_z)s + 6}$$

El término (1+Tzs) en el numerador de T(s) incrementa el sobreimpulso máximo, pero Tz en el cociente de T(s) tiene el efecto de mejorar el amortiguamiento o **reducir el sobreimpulso máximo**

Efecto de añadir polos y ceros a las funciones de transferencia.



Repaso

ESTABILIDAD

Estabilidad

- El problema más importante en los Sistemas de Control conciernen a la estabilidad

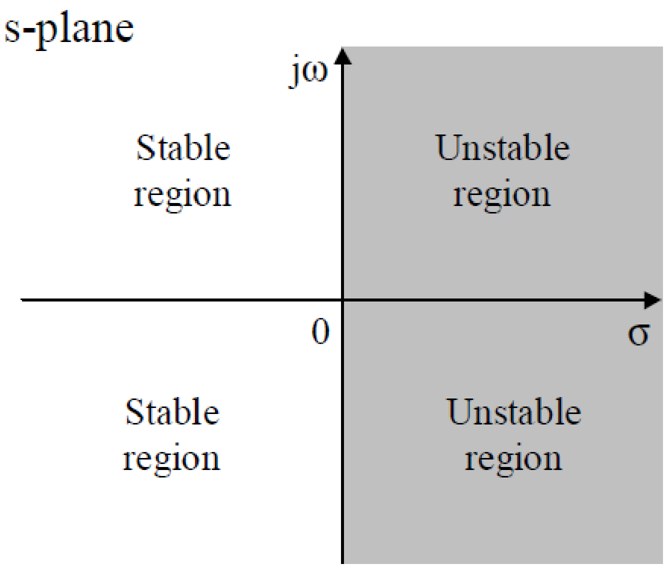
- ***Se dice que un sistema es estable si toda entrada acotada produce una salida acotada. De otra forma el sistema es inestable***

- A este enunciado se le da el nombre de estabilidad de entrada acotada-salida acotada (BIBO bounded input, bounded output).

Estabilidad

- **Teorema**

Un sistema con una función de transferencia racional propia G(s) es estable si y solo si **todos los polos de G(s) tienen parte real negativa,** o equivalentemente, se encuentran en el semiplano izquierdo del plano complejo S



Estabilidad

- El teorema implica que un sistema es **inestable** si la función de transferencia tiene uno o más **polos con parte real positiva o cero**.

- **La estabilidad** de un sistema, **depende solo de los polos** de la función de transferencia G(s) y no de los ceros de G(s).

Escuela Colombiana de Carreras Industriales
ECCI Escuela Tecnológica
Su Institución Universitaria

Criterio de estabilidad Routh-Hurwitz

- Se trata de un procedimiento algebraico para determinar su un polinomio tiene algún cero en el semiplano derecho, lo que implicaría la inestabilidad del sistema.

Criterio de estabilidad Routh-Hurwitz

- Considere un sistema con función de transferencia:

$$G(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

1. El polinomio denominador de G(s) se escribe de la siguiente forma:

$$a(s) = a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n = 0 \qquad (1)$$

2. La condición necesaria pero no suficiente para estabilidad, es que todos los coeficientes de la ecuación $a(s)$ estén presentes, y que todos tengan signo positivo.

Criterio de estabilidad Routh-Hurwitz

Si se cumple la condición necesaria, entonces, se realiza el siguiente esquema:

$$\begin{array}{c|ccccc}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\
s^{n-3} & c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & \cdots \\
s^{n-4} & d_1 & d_2 & d_3 & d_4 & \cdots \\
\vdots & & & & & \\
s^2 & e_1 & e_2 & & & \\
s^1 & f_1 & & & & \\
s^0 & g_1 & & & &
\end{array}$$

Criterio de estabilidad Routh-Hurwitz

Los coeficientes b1, b2, b3, etc., se evalúan de la forma siguiente:

$$b_1 = -\frac{\begin{vmatrix} a_0 & a_2 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix}}{a_1} = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}$$

$$b_1 = \frac{a_1 a_2 - a_0 a_3}{a_1}, \quad b_2 = \frac{a_1 a_4 - a_0 a_5}{a_1}, \quad b_3 = \frac{a_1 a_6 - a_0 a_7}{a_1}, \cdots$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_3 - a_1 b_2}{b_1}, \quad c_2 = \frac{b_1 a_5 - a_1 b_3}{b_1}, \quad c_3 = \frac{b_1 a_7 - a_1 b_4}{b_1}, \quad \cdots$$

$$d_1 = \frac{c_1 b_2 - b_1 c_2}{c_1}, \quad d_2 = \frac{c_1 b_3 - b_1 c_3}{c_1}, \quad \cdots$$

$$\vdots$$

Criterio de estabilidad Routh-Hurwitz

3. La condición necesaria y suficiente para que todas las raíces de $a(s)$ queden en el semiplano izquierdo del plano s, es que todos los coeficientes de $a(s)$ sean positivos y que **todos los términos de la primera columna del conjunto sean positivos**.

$$
\begin{array}{l|c|llll}
s^n & a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \cdots \\
s^{n-1} & a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \cdots \\
s^{n-2} & b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \cdots \\
s^{n-3} & & & & & \cdots \\
s^{n-4} & & & & & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & & & \\
s^2 & e_1 & e_2 & & & \\
s^1 & f_1 & & & & \\
s^0 & g_1 & & & &
\end{array}
$$

Criterio de estabilidad Routh-Hurwitz

- El criterio de Routh-Hurwitz establece que el número de raíces de $a(s)$ con parte real positiva es igual al número de cambios de signo de los coeficientes en la primera columna del arreglo.

Criterio de estabilidad Routh-Hurwitz

- **Ejemplo**: Verifique si es estable el sistema con la siguiente ecuación característica

$$s^3 + 10s^2 + s + 2 = 0$$

$$\begin{array}{lll} s^3 & 1 & 1 \\ s^2 & 10 & 2 \\ s^1 & \frac{-2+10}{10} = \frac{8}{10} & \\ s^0 & 2 & \end{array}$$

Debido a que la primer columna del arreglo son valores mayores que cero, el sistema es estable.

Criterio de estabilidad Routh-Hurwitz

- **Casos especiales.**

Pueden presentarse dos casos especiales:

1. El arreglo de Routh tiene un cero sólo en la primera columna del renglón
2. El arreglo de Routh tiene todo un renglón formado por ceros

Criterio de estabilidad Routh-Hurwitz

1. El arreglo de Routh tiene un cero sólo en la primera columna del renglón

Si un término de la primera columna en cualquier fila es cero, pero los términos restantes no son cero, o no hay más términos, se asigna un número muy pequeño positivo ε para substituir el cero de la primera columna

$$s^4 + s^3 + 2s^2 + 2s + 3 \Rightarrow$$

$$\begin{array}{c|lll} 4 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 & \\ 2 & 0 \rightarrow \varepsilon & 3 & \\ 1 & \frac{2\varepsilon-3}{\varepsilon} & & \\ 0 & 3 & & \end{array}$$

Criterio de estabilidad Routh-Hurwitz

- Una vez construida la tabla se determina el limite de aquellos elementos en la primera columna en los que aparezca ε, cuando ε->0.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{2\varepsilon - 3}{\varepsilon} = -\infty$$

- Por lo tanto, la primera columna queda:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -\infty \\ 3 \end{array}$$

- Se presentan dos cambios de signo en la primera columna, y por consiguiente el sistema tiene dos raíces en el semiplano derecho, y es inestable.

Criterio de estabilidad Routh-Hurwitz

2. El arreglo de Routh tiene todo un renglón formado por ceros

En el caso en que se presente toda una fila de ceros se procede a formar una **ecuación subsidiaria** a partir de los coeficientes de la **fila anterior** a aquella en la que todos los elementos sean nulos.

Para obtener la fila siguiente, en la tabla de Routh, se procede a **derivar esta expresión una vez con respecto a s** y situar sus coeficientes en la fila cuyos elementos se habían anulado.

A partir de esta sustitución se prosigue la construcción de la tabla de Routh normalmente

Criterio de estabilidad Routh-Hurwitz

Ejemplo: Considere el siguiente polinomio

$$s^4 + 3s^3 + 3s^2 + 3s + 2$$

se construye la tabla de Routh:

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \\ 1 & 0 & 0 & \end{array}$$

La ecuación subsidiaria

$$2s^2 + 2 = 0$$

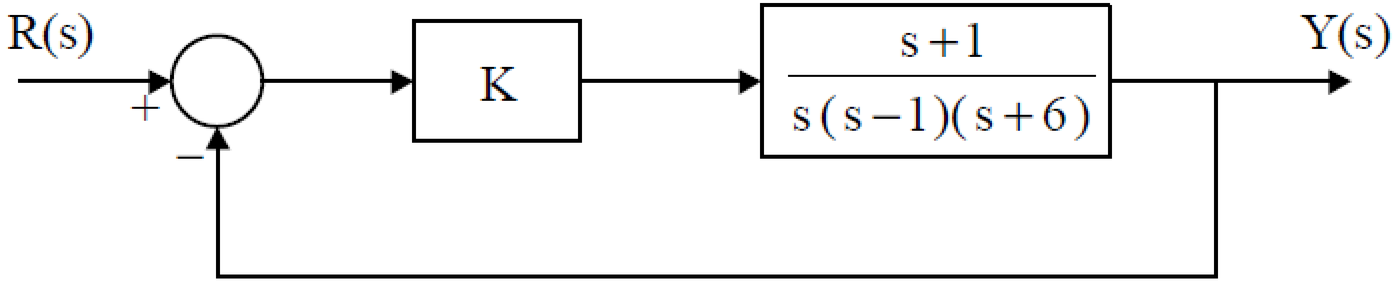
$$s^2 + 1 = 0$$

$$\begin{array}{c|ccc} 4 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & \\ 1 & 4 & 0 & \\ 0 & 2 & & \end{array}$$

La derivada es 2s

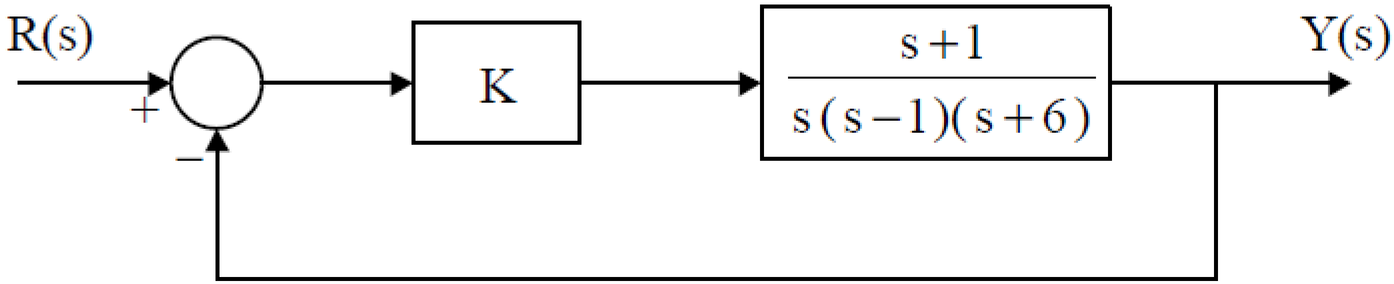
Aplicación del criterio de R-H para el análisis de sistemas de control

- **Ejercicio**: Considere el siguiente sistema de lazo cerrado



Usando el criterio de R-H determine el rango de K en el que el sistema es estable

Aplicación del criterio de R-H para el análisis de sistemas de control



- La función de transferencia es:

$$\frac{Y(s)}{R(s)} = \frac{K(s+1)}{s^3 + 5s^2 + s(K-6) + K}$$

Aplicación del criterio de R-H para el análisis de sistemas de control

- La tabla de Routh es:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & K-6 \\ s^2 & 5 & K \\ s^1 & \frac{4}{5}K-6 & \\ s^0 & K & \end{array}$$

$\frac{4}{5}K-6 \rightarrow K>15/2$

$K \rightarrow K>0$

$\left.\begin{array}{l} K>15/2 \\ K>0 \end{array}\right\} K>15/2$

Para la estabilidad todos los coeficientes de la primera columna deben ser positivos

K>15/2 para tener estabilidad

Repaso

MÉTODO DEL LUGAR GEOMÉTRICO DE LAS RAÍCES

Método del lugar geométrico de las raíces

- La importancia de este método reside en el hecho de que **se puede observar muy fácilmente cómo varía la situación de polos y ceros** de un sistema en lazo cerrado cuando **variamos un parámetro ajustable** (normalmente la ganancia, aunque no necesariamente).

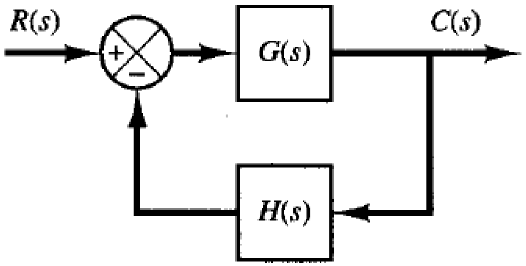
Método del lugar geométrico de las raíces

- El método del lugar de las raíces es un procedimiento poderoso en el dominio del tiempo, ya que determina no solamente la estabilidad sino también la respuesta transitoria.

- Mediante el método del lugar geométrico de las raíces, el diseñador puede **predecir los efectos que tiene en la ubicación de los polos** en lazo cerrado, **variar el valor de la ganancia** o **agregar polos y/o ceros** en lazo abierto.

Método del lugar geométrico de las raíces con Matlab

- Suponga que se tiene el siguiente sistema



La ecuación característica es:

$$1 + G(s)H(s) = 0$$

En muchos casos, G(s)H(s) contiene un parámetro de ganancia ***K,*** y la ecuación característica se escribe como

$$1 + \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} = 0$$

En estos análisis, suponemos que el parámetro de interés es la ganancia ***K,*** en donde ***K > 0.***

Método del lugar geométrico de las raíces con Matlab

$$1 + \frac{K(s+z_1)(s+z_2)\cdots(s+z_m)}{(s+p_1)(s+p_2)\cdots(s+p_n)} = 0$$

- reescribiendo

$$1 + K\frac{\text{num}}{\text{den}} = 0$$

- donde

$$\begin{aligned} \text{num} &= (s+z_1)(s+z_2)\ldots(s+z_m) \\ &= s^m + (z_1+z_2+\cdots+z_m)s^{m-1} + \cdots + z_1 z_2 \cdots z_m \\ \text{den} &= (s+p_1)(s+p_2)\ldots(s+p_n) \\ &= s^n + (p_1+p_2+\cdots+p_n)s^{n-1} + \cdots + p_1 p_2 \cdots p_n \end{aligned}$$

Los lugares geométricos de las raíces para el sistema son los lugares geométricos de los polos en lazo cerrado conforme la ganancia ***K*** varía de cero a infinito

Método del lugar geométrico de las raíces con Matlab

- Un comando de MATLAB que se usa con frecuencia para graficar los lugares geométricos de las raíces es:

```
rlocus(sys)
rlocus (num,den)
rlocus(A,B,C,D)
```

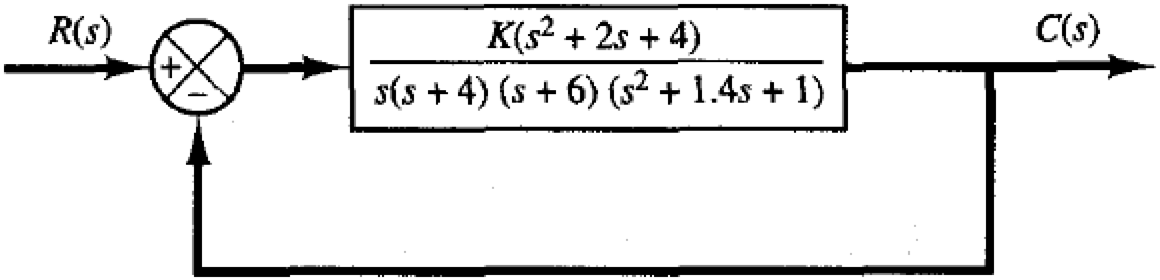
- Con este comando, dibuja la gráfica del lugar geométrico de las raíces. El vector de ganancias K se determina en forma automática
- También se puede especificar el vector de ganancias K

```
rlocus(sys,K)
rlocus (num,den,K)
rlocus(A,B,C,D,K)
```

Método del lugar geométrico de las raíces con Matlab

- **Ejemplo**

Considere el siguiente sistema



- Lo primero que se debe hacer es encontrar los polinomios del numerador y el denominador en lazo abierto.

Método del lugar geométrico de las raíces con Matlab

$$\frac{K(s^2+2s+4)}{s(s+4)(s+6)(s^2+1.4s+1)}$$

- El numerador está dado como polinomio en s.
- Sin embargo, el denominador se obtiene como un producto de los términos de primer y segundo orden, lo cual implica que debemos multiplicar estos términos para obtener un polinomio en s.
- La multiplicación de estos términos se efectúa con facilidad mediante el ***comando de convolución*** `C=CONV(A, B)` *de* Matlab

Método del lugar geométrico de las raíces con Matlab

$$\frac{K(s^2+2s+4)}{s(s+4)(s+6)(s^2+1.4s+1)}$$

$a = s(s+4) = s^2 + 4s$: a = [1 4 0]

$b = s + 6$: b = [1 6]

$c = s^2 + 1.4s + 1$: c = [1 1.4 1]

```
a = [ 1 4 0];
b = [1 6];
c=[1 1.4 1];
d = conv(a,b)
e= conv(c,d)
e= 1.00  11.40  39.00  43.60  24.00   0
```

Por tanto, el polinomio del denominador es

den = [1 11.4 39 43.6 24 0]

Método del lugar geométrico de las raíces con Matlab

- Para encontrar los **polos y ceros en lazo abierto** de la función de transferencia determinada, usamos el comando **roots**

- **Ceros en lazo abierto:**

```
p = [1 2 4]
r = roots(p)
r =
  -1.0000 + 1.7321i
  -1.0000 - 1.7321i
```

***Dos ceros**

Polos en lazo abierto:

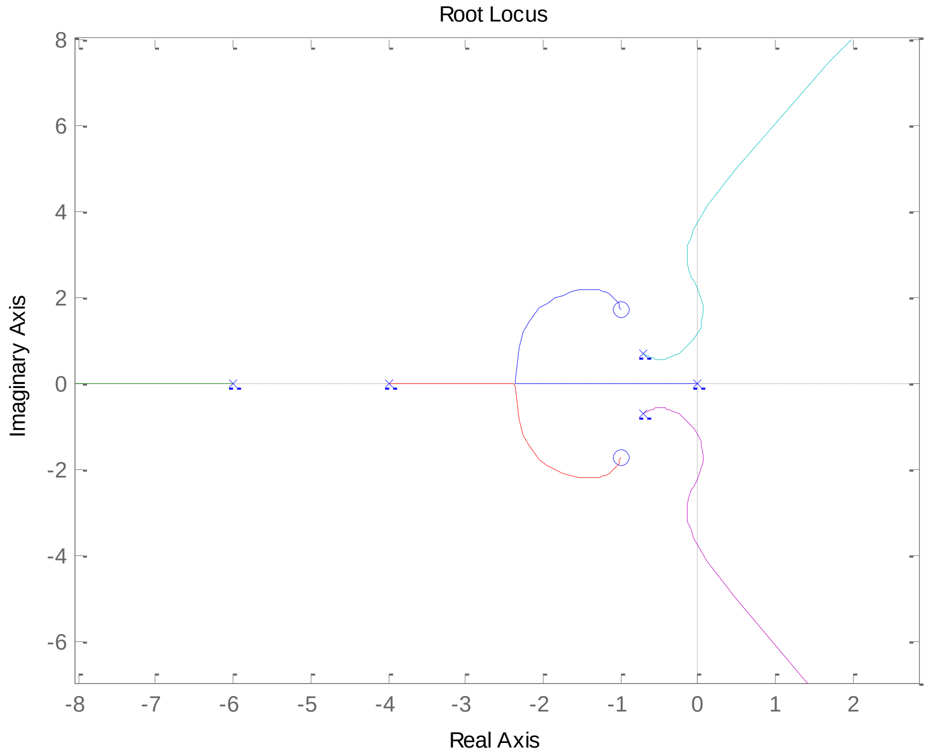
```
roots(e)
ans =
         0
  -6.0000
  -4.0000
  -0.7000 + 0.7141i
  -0.7000 - 0.7141i
```

***Cinco polos**

Método del lugar geométrico de las raíces con Matlab

Ahora se Gráfica en Matlab el Lugar de las Raíces

```
num=[1 2 4]
den=[1.0 11.4 39.0 43.60 24.0 0]
rlocus(num,den)
```



Método del lugar geométrico de las raíces con Matlab

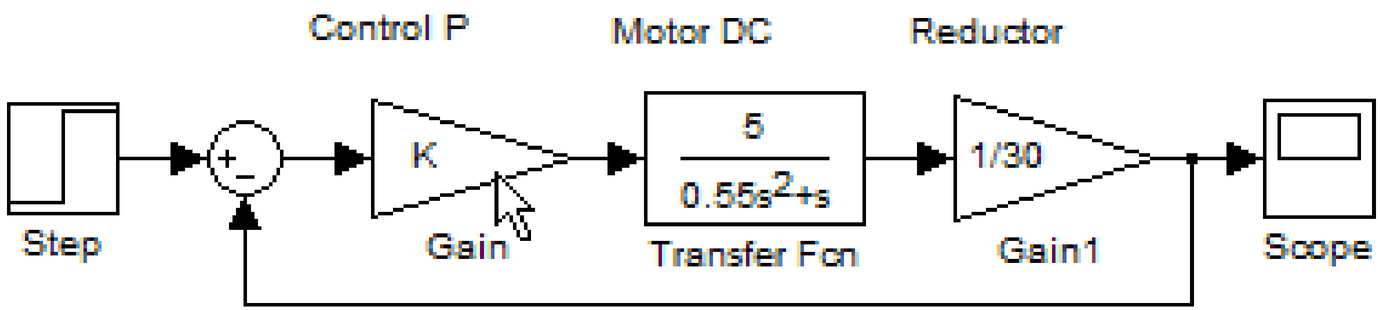
- El número de ramas del LGR es igual al número de polos del sistema

- El LGR es simétrico respecto al eje real del plano s.

- El LGR comienza en los polos del lazo abierto y termina en los ceros del lazo abierto a medida que K aumenta desde cero hasta infinito

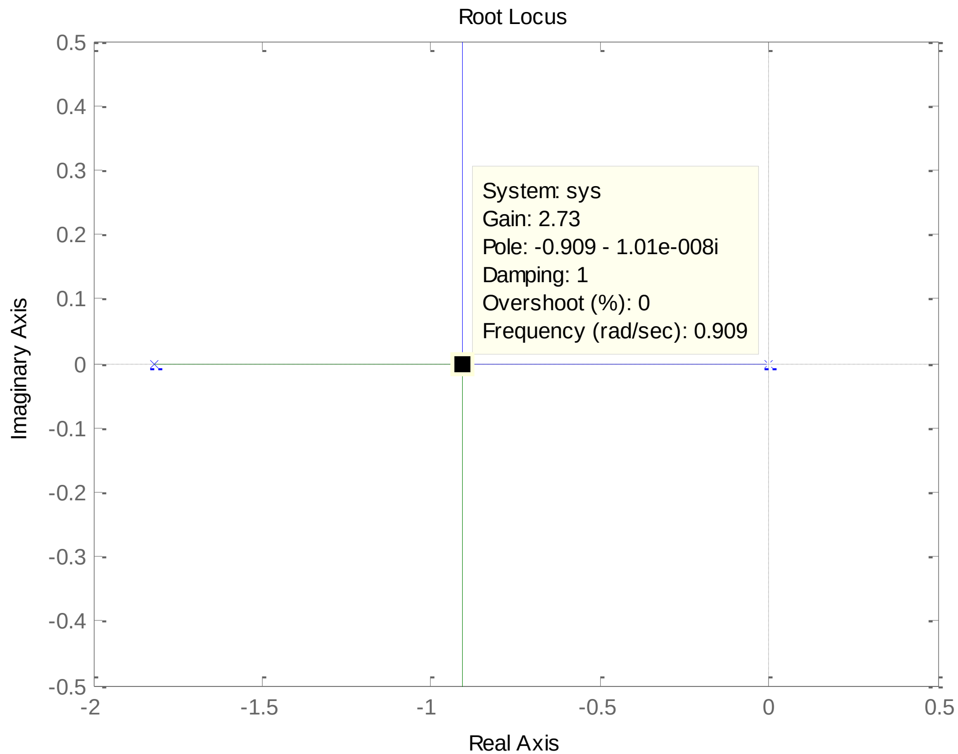
Método del lugar geométrico de las raíces con Matlab

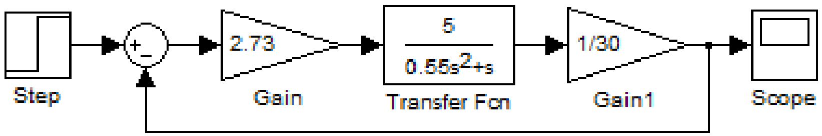
- **Ejemplo de diseño**

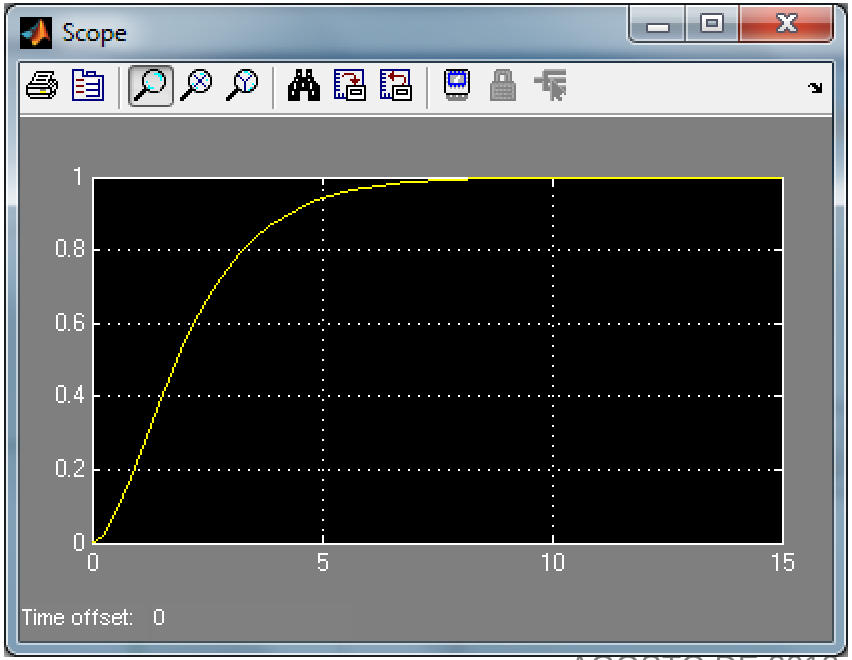


Analizar el comportamiento del sistema al variar la ganancia K usando el método del lugar geométrico de las raíces

Método del lugar geométrico de las raíces con Matlab

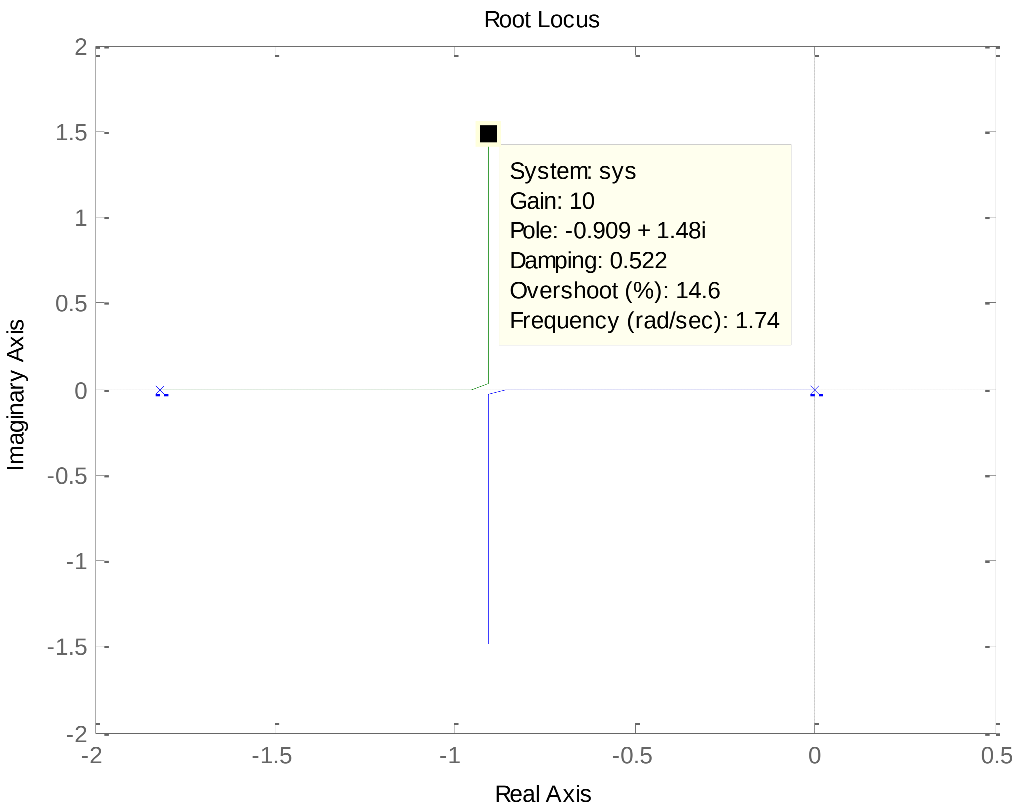


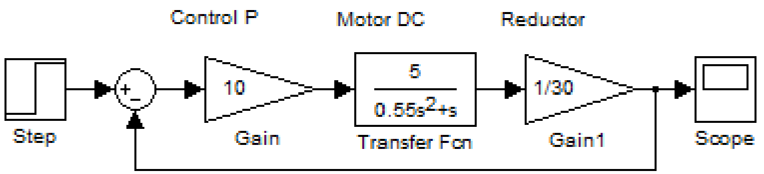


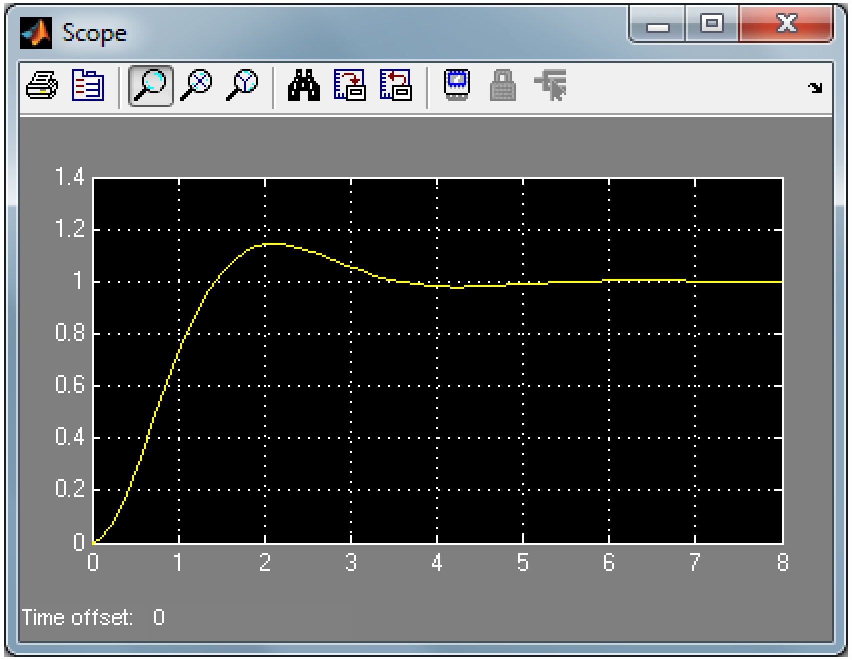



```
num=5
den=30*conv([1 0],[0.55 1])
K=0:0.01:10
rlocus(num,den,K)
```

Método del lugar geométrico de las raíces con Matlab



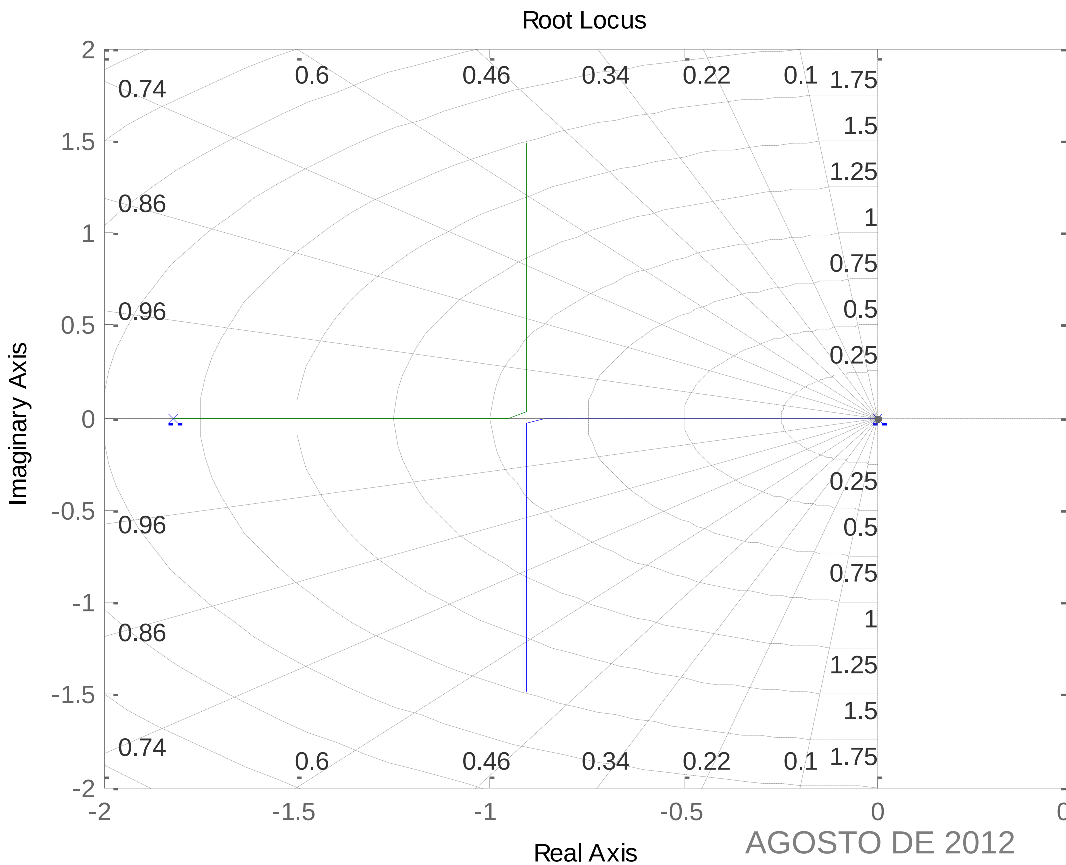




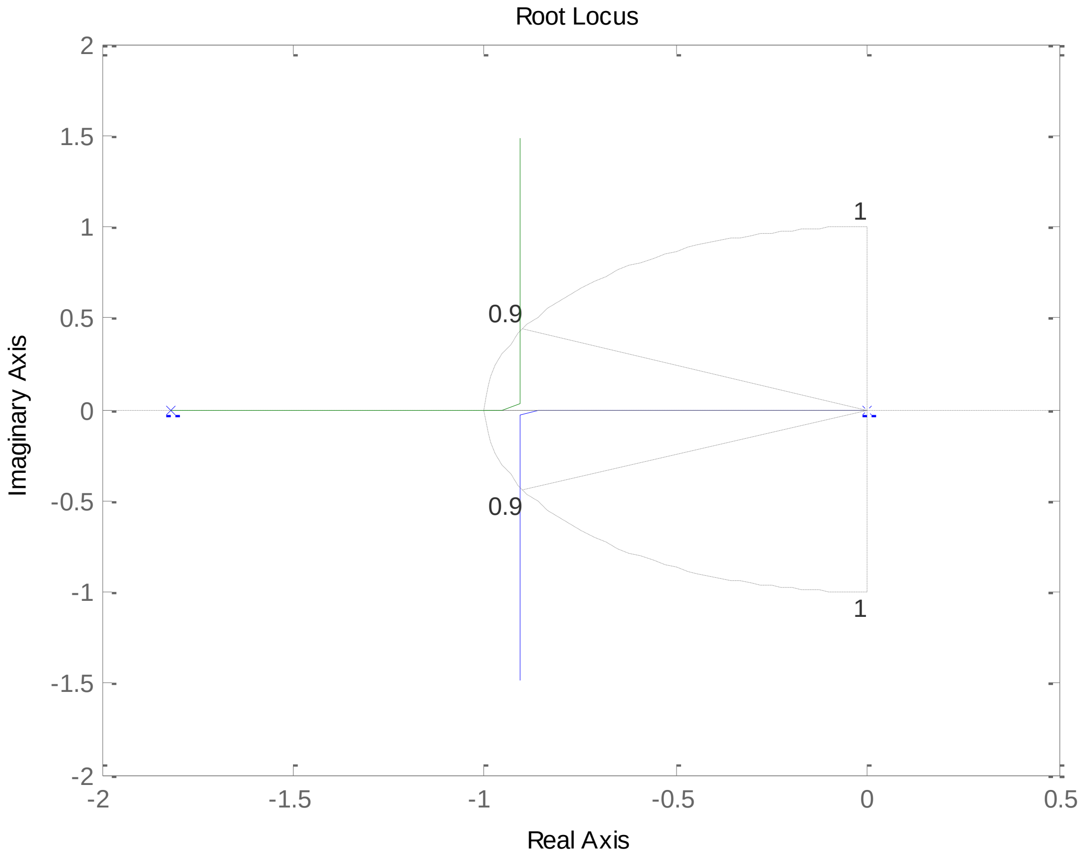
Método del lugar geométrico de las raíces con Matlab

- Función `sgrid`: sobre el lugar de las raíces ya trazado, genera una rejilla en el plano s con los puntos de igual coeficiente de amortiguamiento e igual frecuencia natural

```
num=5
den=30*conv([1 0],[0.55 1])
K=0:0.01:10
rlocus(num,den,K)
sgrid
```



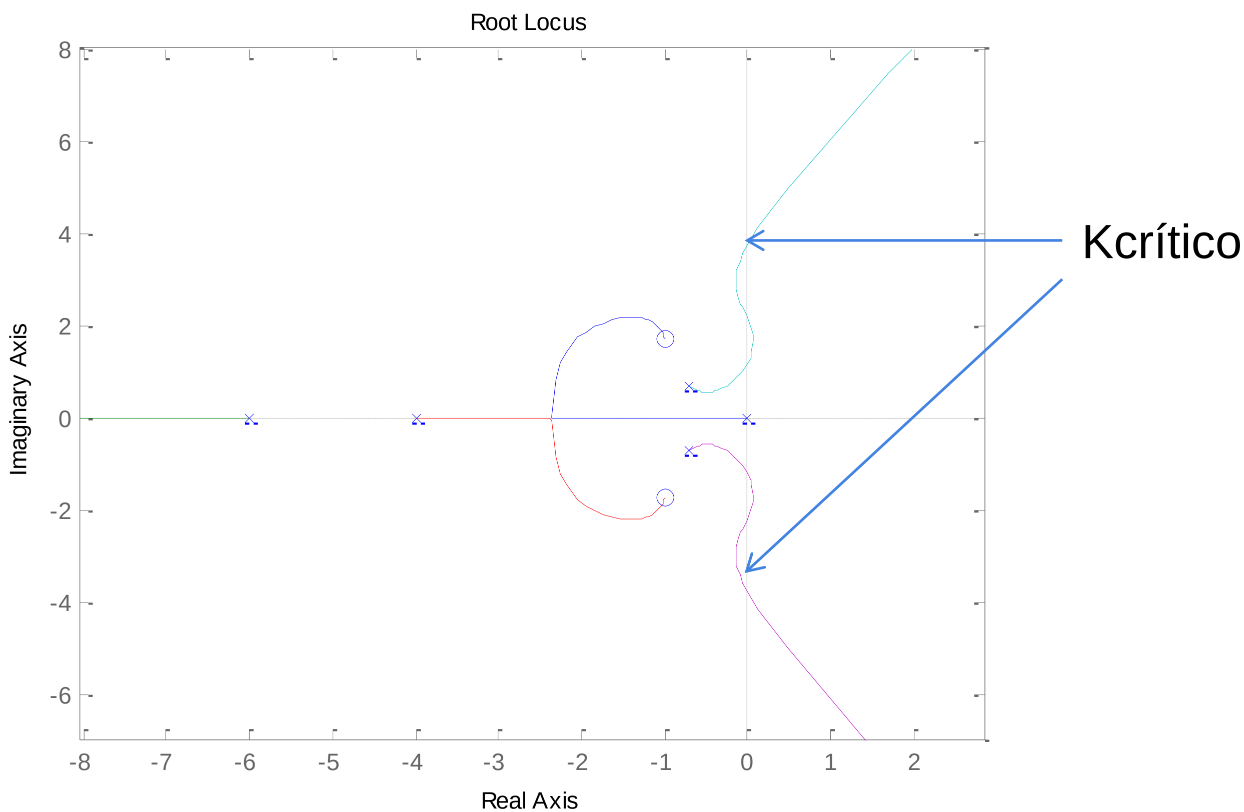
Método del lugar geométrico de las raíces con Matlab




```
num=5
den=30*conv([1 0],[0.55 1])
K=0:0.01:10
rlocus(num,den,K)
[k, raices]=rlocfind(num,den)
z=0.9
wn=1
sgrid(z,wn)
```

- Con la función `rlocfind(num,den)` se puede calcular el valor de la ganancia en el punto deseado

Análisis de estabilidad con el método del lugar geométrico de las raíces



Valores de K que en los que el sistema es estable

Valores de K que ocasionan inestabilidad

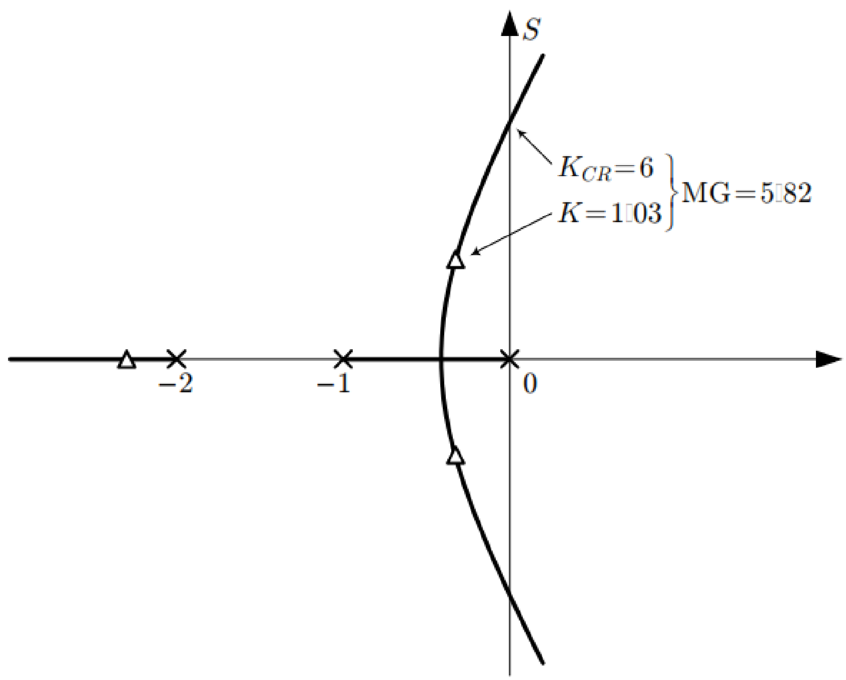
Definiciones: Margen de Ganancia

- El margen de la ganancia es el factor proporcional que se debe introducir dentro del lazo de control para que el sistema se vuelva críticamente estable

- El margen de ganancia es, por tanto, el cociente de la ganancia critica del sistema entre la ganancia actual de la función de transferencia en lazo abierto.

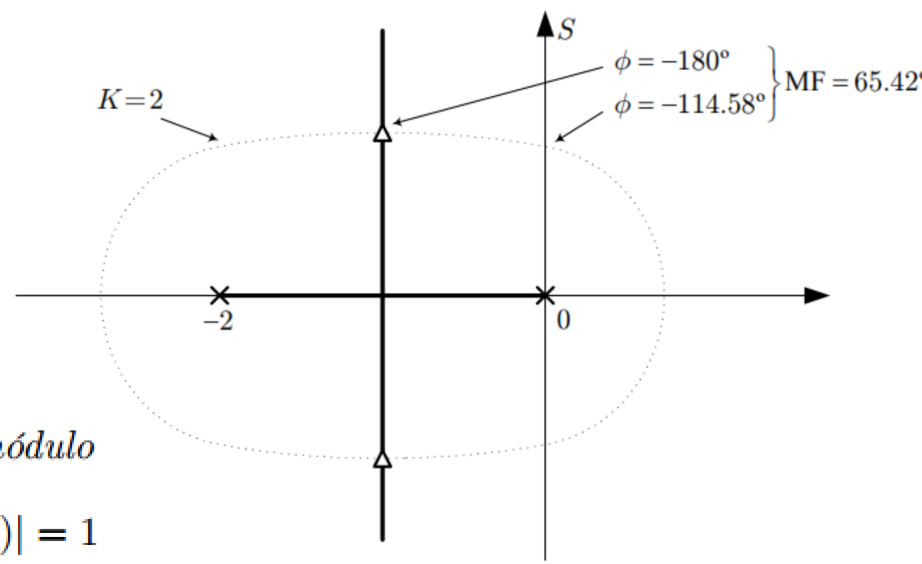
Definiciones: Margen de Ganancia

- Ejemplo: Se ha impuesto un comportamiento transitorio con amortiguamiento 0.5 y la ganancia necesaria para ello es K = 1.03. El sistema se hace inestable para una ganancia crítica K= 6. El margen de ganancia es MG = 5.82.



Definiciones: Margen de fase

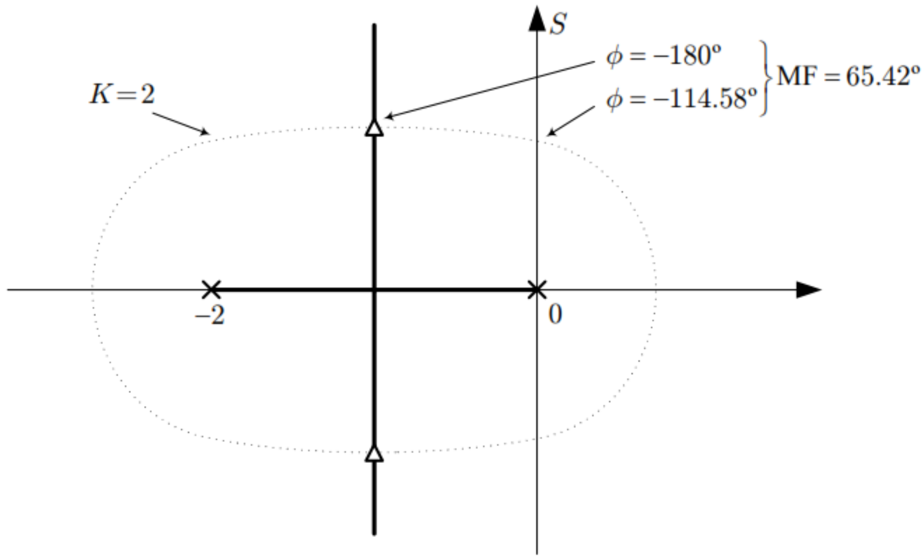
- El margen de fase se define como el ángulo que se puede sustraer al sistema para dejarlo en el límite de estabilidad, manteniendo constante la ganancia del mismo.
- En la Figura se señalan los puntos del plano S en los que se obtiene una ganancia en lazo abierto de K = 2 aplicando la condición del módulo



Condición de magnitud, amplitud o módulo

$$|G(s)H(s)| = 1$$

Definiciones: Margen de fase



Sólo los dos puntos en los que se obtiene una fase de -180° aplicando la condición del ángulo pertenecen al lugar de las raíces. La diferencia entre la fase de esos puntos y la fase de los puntos con la misma ganancia que están sobre el eje imaginario es el margen de fase del sistema

Condición de ángulo:

$$\angle G(s)H(s) = \pm 180^o(2k+1) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

Inconvenientes del análisis en el dominio del tiempo

- Respuesta en el tiempo es difícil de determinar analíticamente, sobretodo en sistemas de orden superior.

- Se recurre al análisis en el dominio de la frecuencia cuyos métodos de análisis grafico no están limitados a sistemas de bajo orden

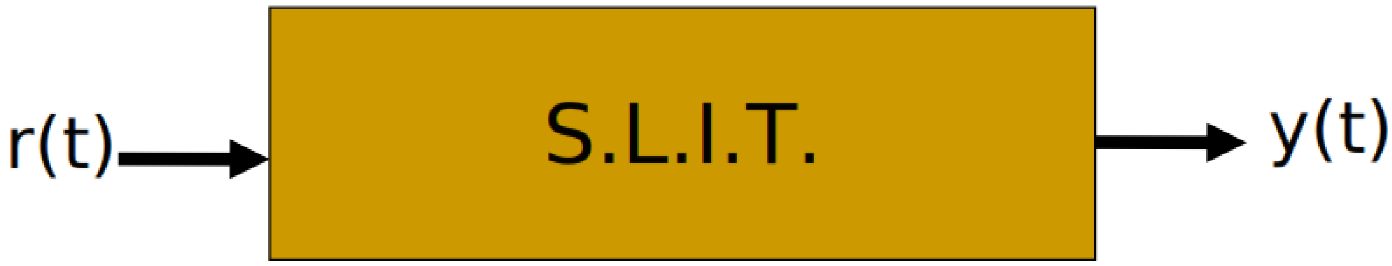
Repaso

ANÁLISIS DE SISTEMAS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

Respuesta en frecuencia de sistemas retroalimentados

- *La respuesta a la frecuencia de un sistema se define como la respuesta en estado estacionario o de régimen permanente a una entrada sinusoidal.*

Respuesta en frecuencia de sistemas retroalimentados



Entrada:

$$r(\mathrm{t}) = A\, sen(\omega t)$$

Salida:

$$\mathrm{yss(t)} = \mathrm{B}\, sen(\omega t + \varphi),$$

con amplitud: $B = A|G(j\omega)|$

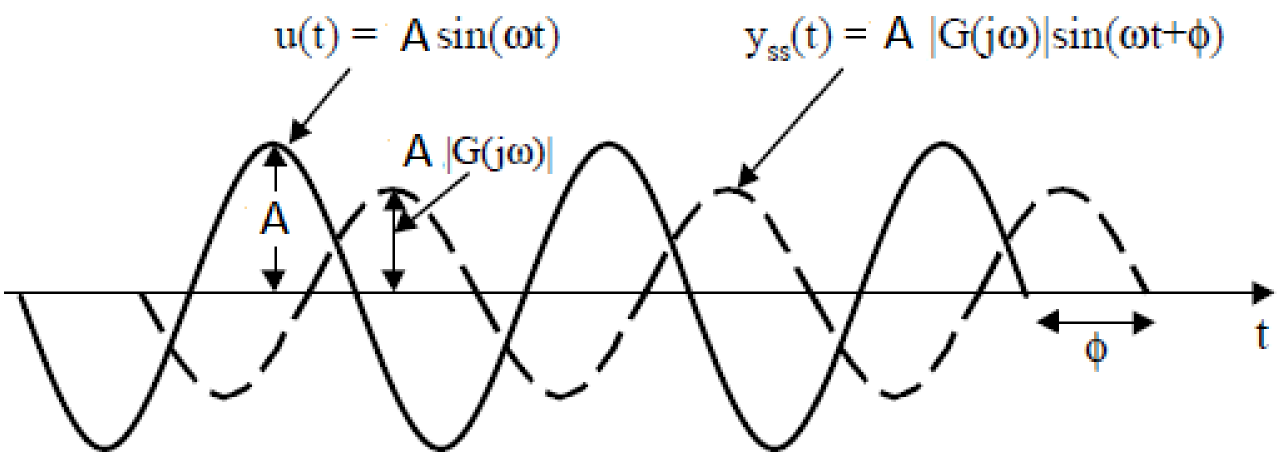
y desfase $\varphi\angle G(j\omega)$

Respuesta en frecuencia de sistemas retroalimentados

La respuesta en *estado estacionario* viene dada por una señal senoidal de la misma frecuencia $yss(\mathrm{t}) = \mathrm{B}\, sen(\omega t + \varphi)$,con amplitud: $B = A|G(j\omega)|$ y desfase $\varphi \angle G(j\omega)$

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\{\mathrm{Re}[G(j\omega)]\}^2 + \{\mathrm{Im}[G(j\omega)]\}^2}$$

$$\phi(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\mathrm{Im}[G(j\omega)]}{\mathrm{Re}[G(j\omega)]}\right) = \angle G(j\omega)$$



Especificaciones en el dominio de la frecuencia

Las siguientes especificaciones se emplean en la práctica:

- **Pico de resonancia** (Mr o Tr)
- **Frecuencia de resonancia** (ωr)
- **Ancho de banda** (BW)

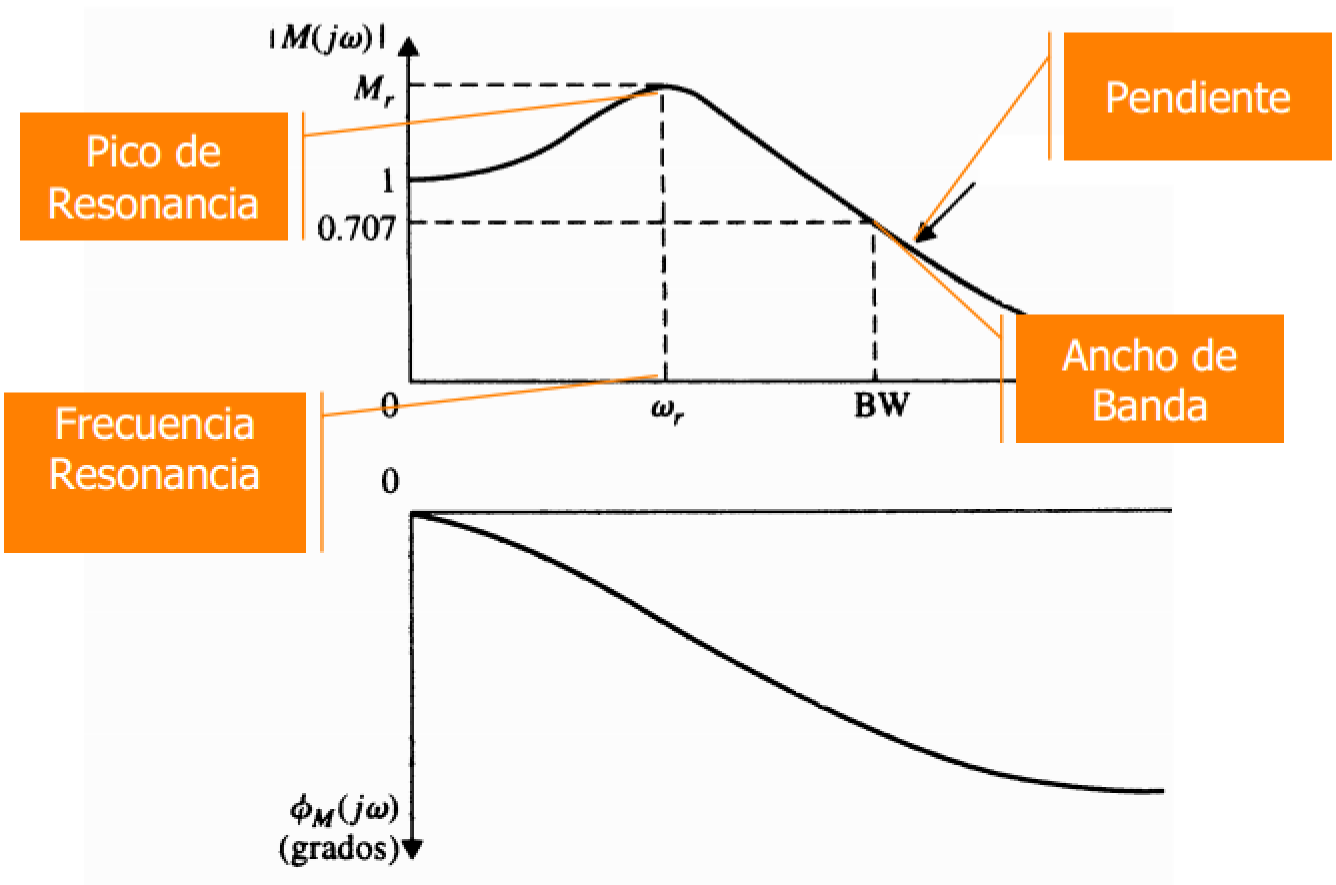
Especificaciones en el dominio de la frecuencia

- **Pico de resonancia** (Mr o Tr)
  - Es el valor máximo de $|T(j\omega)|$.
  - Da indicación de la estabilidad relativa de un sistema estable a lazo cerrado
  - Ligado al sobreimpulso máximo
- **Frecuencia de resonancia** (ωr)
  - Frecuencia a la cual ocurre el pico de resonancia

Especificaciones en el dominio de la frecuencia

- **Ancho de banda** (BW)
  - Frecuencia a la cual $|T(j\omega)|$ cae al 70.7% (−3dB) de su valor a $\omega=0$ (frecuencia de corte inferior)
  - Da indicación de propiedades de la respuesta transitoria, las características de filtrado de ruido y robustez del sistema

Especificaciones en el dominio de la frecuencia



Relación entre ωr,BW, Mr y ζ, ωn

- Frecuencia de resonancia

$$\omega_r = \omega_n \sqrt{1-2\zeta^2}; \quad para \quad \zeta < 1/\sqrt{2}$$

- Pico de resonancia

$$|T_r| = \frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}; \quad para \quad \zeta < 1/\sqrt{2}$$

- Ancho de banda

$$\frac{BW}{\omega_n} = \sqrt{(1-2\zeta^2) + \sqrt{4\zeta^4 - 4\zeta^2 + 2}}$$

Respuesta en frecuencia con Matlab

La respuesta en frecuencia queda determinada por el comando `freqs`

- `freqs(num,den)`

Dibuja la respuesta en frecuencia de un sistema con numerador num denominador den. Presenta 2 gráficas: la magnitud ($|G(j\omega)|$) frente a la frecuencia en escala logarítmica y otra con el ángulo de desfase($\angle G(j\omega)$) en grados frente a la frecuencia también en escala logarítmica

- `freqs(num,den,w)`

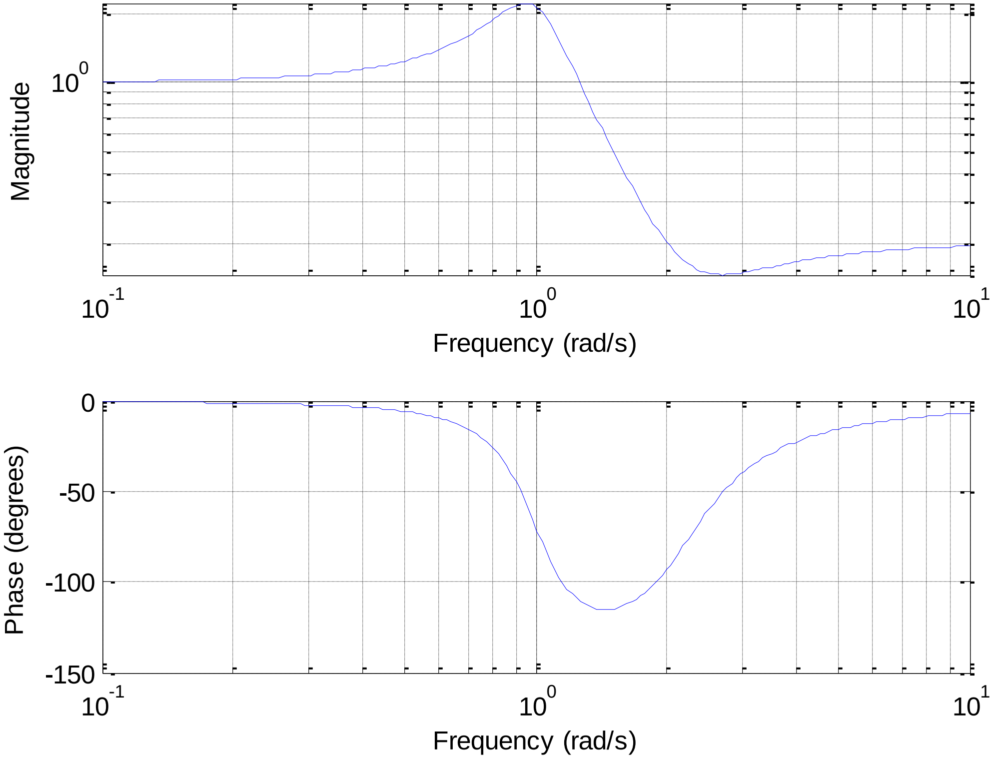
Dibuja la respuesta en frecuencia en el rango de frecuencias especificado en w

Respuesta en frecuencia con Matlab

Ejemplo

$$H(s) = \frac{0.2s^2 + 0.3s + 1}{s^2 + 0.4s + 1}$$

```
a = [1 0.4 1];
b = [0.2 0.3 1];
w = logspace(-1,1);
freqs(b,a,w)
```



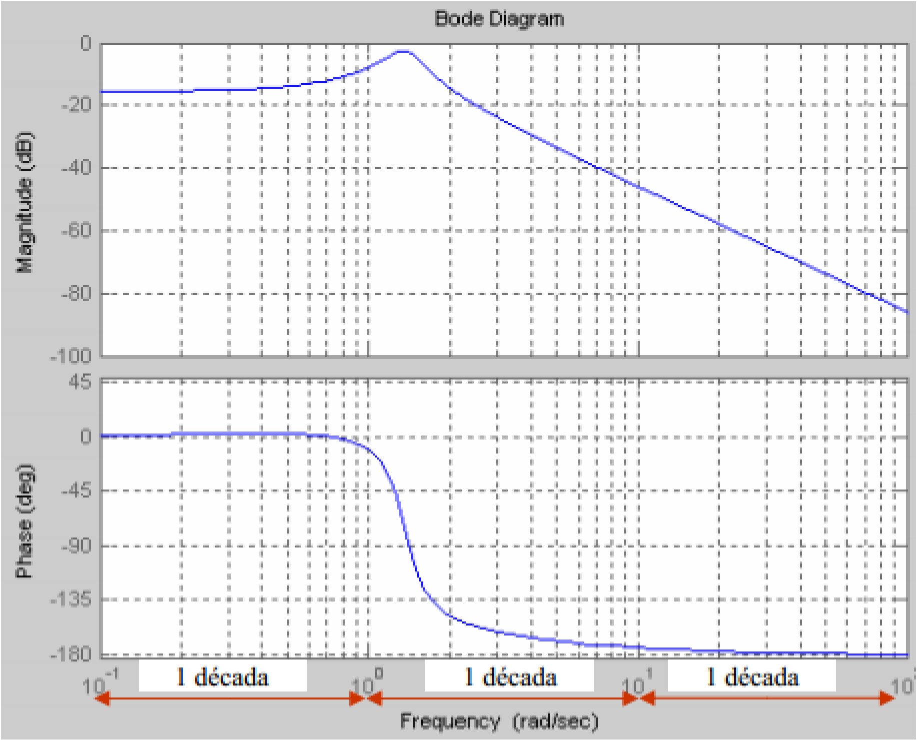
* logspace(a,b,n) define un vector fila de n elementos logarítmicamente espaciados entre 10^a y 10^b

Característica de la respuesta en frecuencia en forma gráfica

- En general se utilizan dos representaciones gráficas:
  - Diagrama de Bode o Diagrama Logarítmico
  - Diagrama de Nyquist o Diagrama Polar

Diagrama de Bode

- Consiste en representar dos curvas independientes: en una el módulo $|G(j\omega)|$, y en otra la fase $\angle G(j\omega)$, en función de la frecuencia.



Matlab

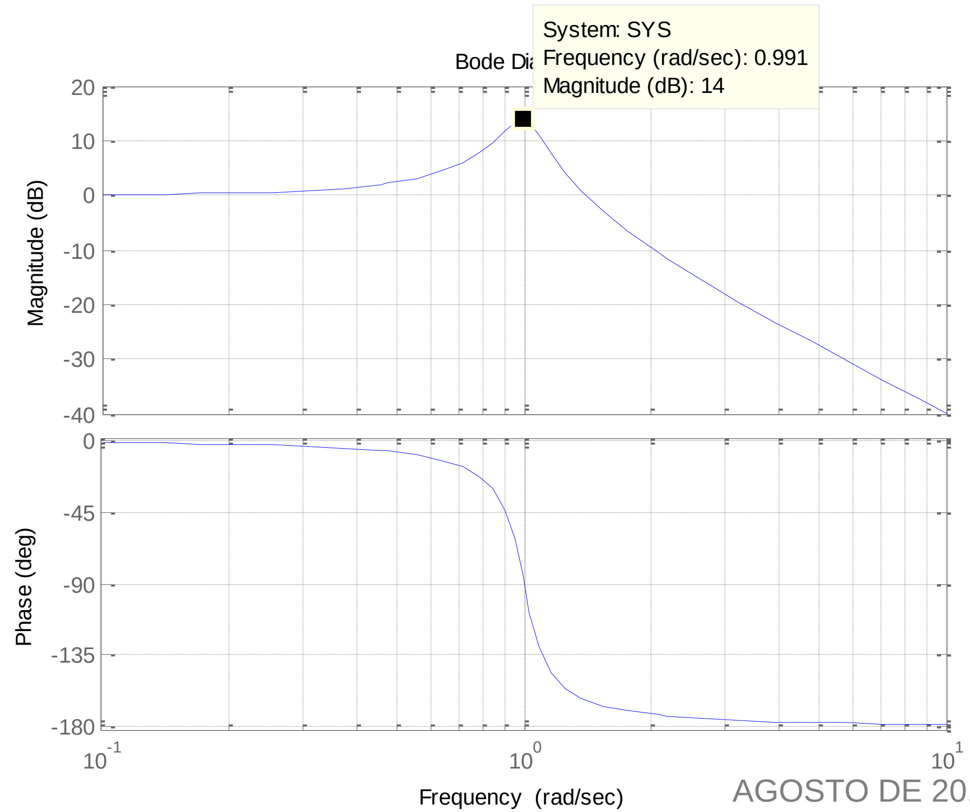
El comando de Matlab **bode(SYS)** calcula la ganancia logarítmica y ángulos de fase de la respuesta de frecuencia de la función LTI SYS = tf (num, den),

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0{,}2s + 1}$$

```
num = [1];
den = [1 0,2 1];
SYS = tf(num,den);
bode(SYS)
```

o

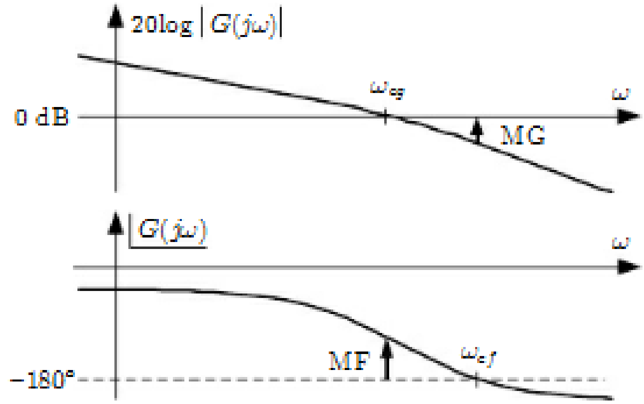
```
bode(num,den)
```



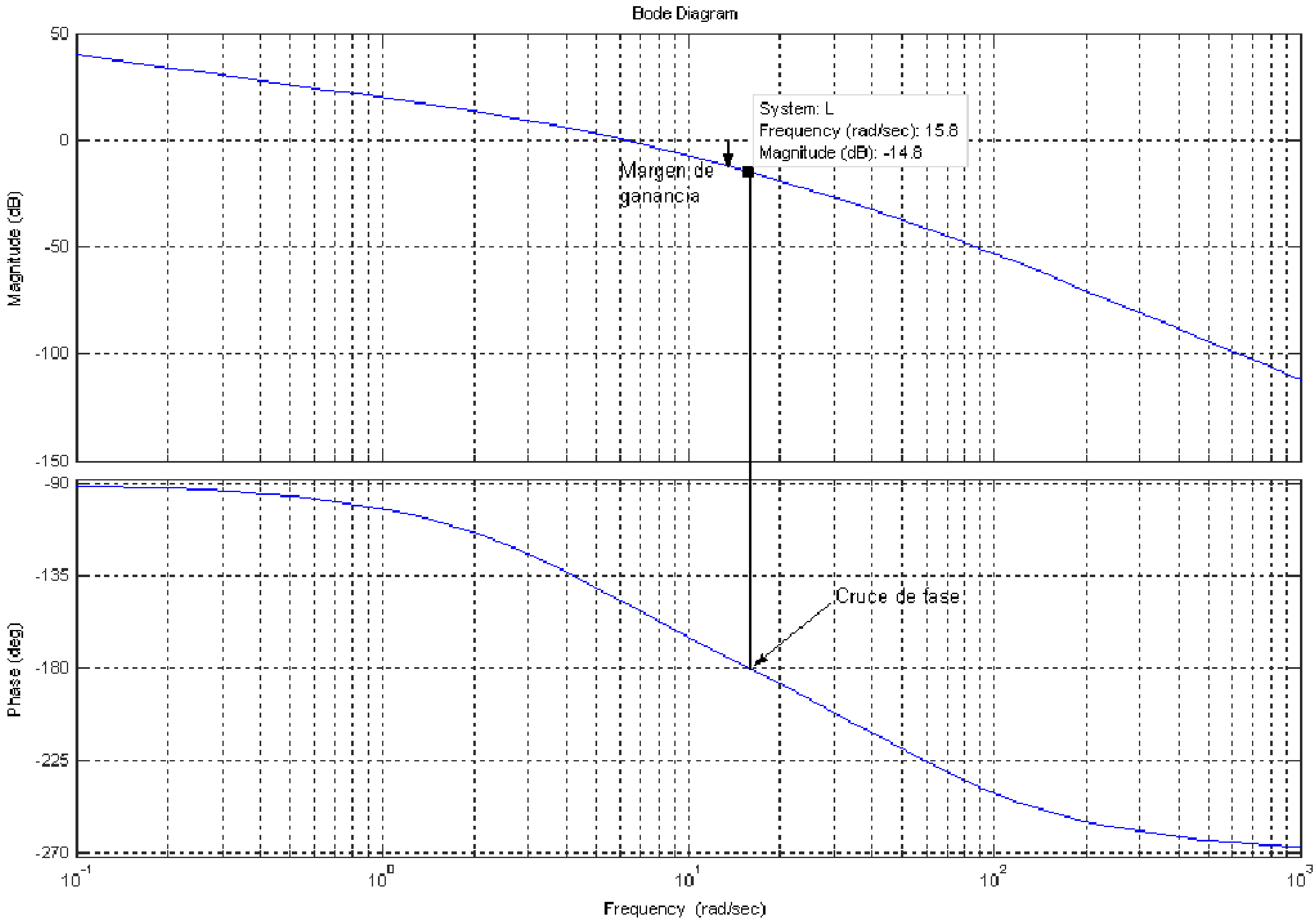
Definiciones: Margen de ganancia MG

- Es la cantidad de ganancia en decibeles que se puede añadir al lazo antes que el sistema en lazo cerrado se vuelva inestable

- Se define como la ganancia de amplitud necesaria para hacer $|L(j\omega)|=1$ o 0dB cuando $\angle L(j\omega)$ es de 180°



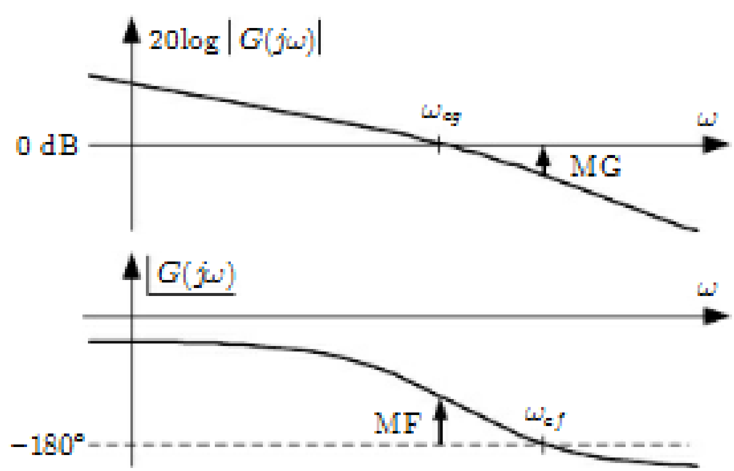
Definiciones: Margen de ganancia MG



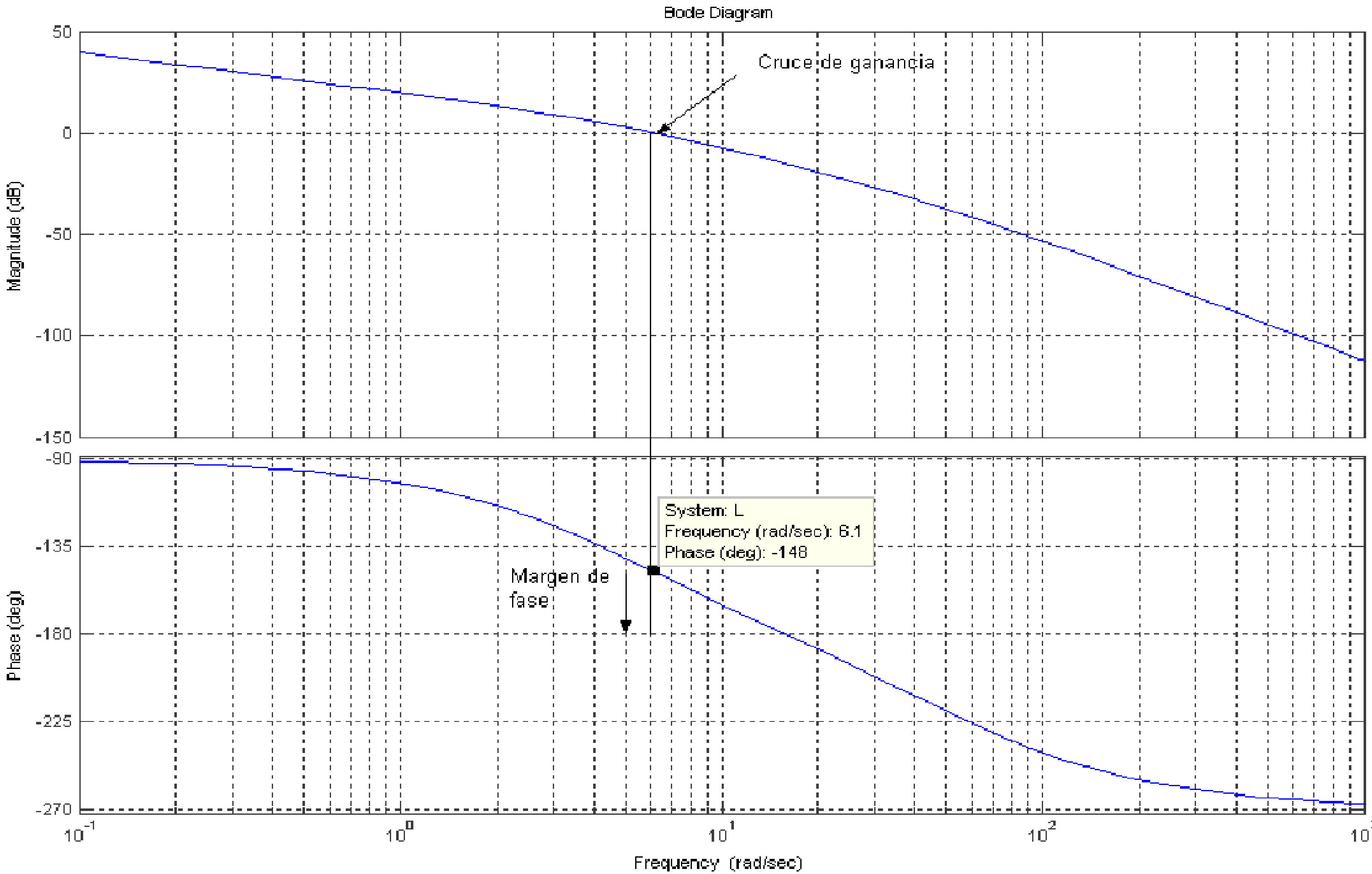
Definiciones: Margen de fase MF

- El **margen de fase** es definido como el cambio en la fase de lazo abierto necesaria para que el sistema de lazo cerrado sea inestable

- El margen de fase es la diferencia entre la curva de fase y -180 grados en el punto correspondientes a la frecuencia que nos da una ganancia de 0 dB.



Definiciones: Margen de fase MF



Matlab: MF y MG

- Para obtener el margen de ganancia, el margen de fase, la frecuencia de cruce de ganancia y la frecuencia de cruce de fase MatLab dispone del comando `margin`
- `[Gm,Pm,Wcg,Wcp] = margin (A,B,C,D)` retorna los valores de margen de ganancia (Gm), margen de fase (Pm), frecuencia de cruce de ganancia (Wcg) y la frecuencia de cruce de fase (Wcp)
- `[Gm,Pm,Wcg,Wcp] = margin (NUM,DEN)` cuando se trabaja con la función de transferencia
- `[Gm,Pm,Wg,Wp] = margin(mag,phase,w)` parámetros del bode

Matlab: MF y MG

- Ejemplo

```
num1 = [100 200];
den1 = [1 15 85 225 274 120];
[mag1,fase1,w1] = bode(num1,den1);
[Gm1,Pm1,wcg1,wcp1] = margin(mag1,fase1,w1)


Gm1 =
    3.5864
Pm1 =
   85.2176
wcg1 =
    2.8687
wcp1 =
    1.0868
```

Diagrama de Bode: Estabilidad

Un sistema en lazo cerrado es estable cuando sus márgenes de fase MF y ganancia MG son ambos **positivos**.

Definiciones: Sistemas de fase Mínima y No Mínima

- Sistema de fase Mínima

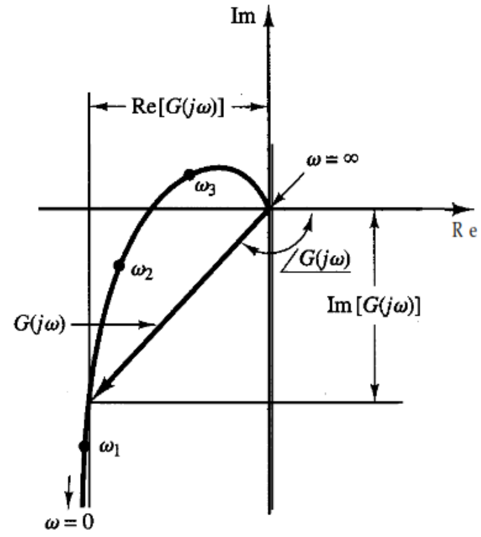
Si los polos y los ceros de un sistema se encuentran todos en el semiplano izquierdo del plano ‘s’

- Sistema de fase No Mínima

El sistema tiene al menos un polo o un cero en el semiplano derecho del plano ‘s’

La traza polar o Diagrama de Nyquist

- La traza polar de una función de transferencia senoidal $G(j\omega)$ es una gráfica de la magnitud de $G(j\omega)$ contra el ángulo de fase de $G(j\omega)$ en coordenadas polares, conforme ω varía de cero a infinito.



- Cada punto del diagrama representa un valor de G(jω) para una determinada ω

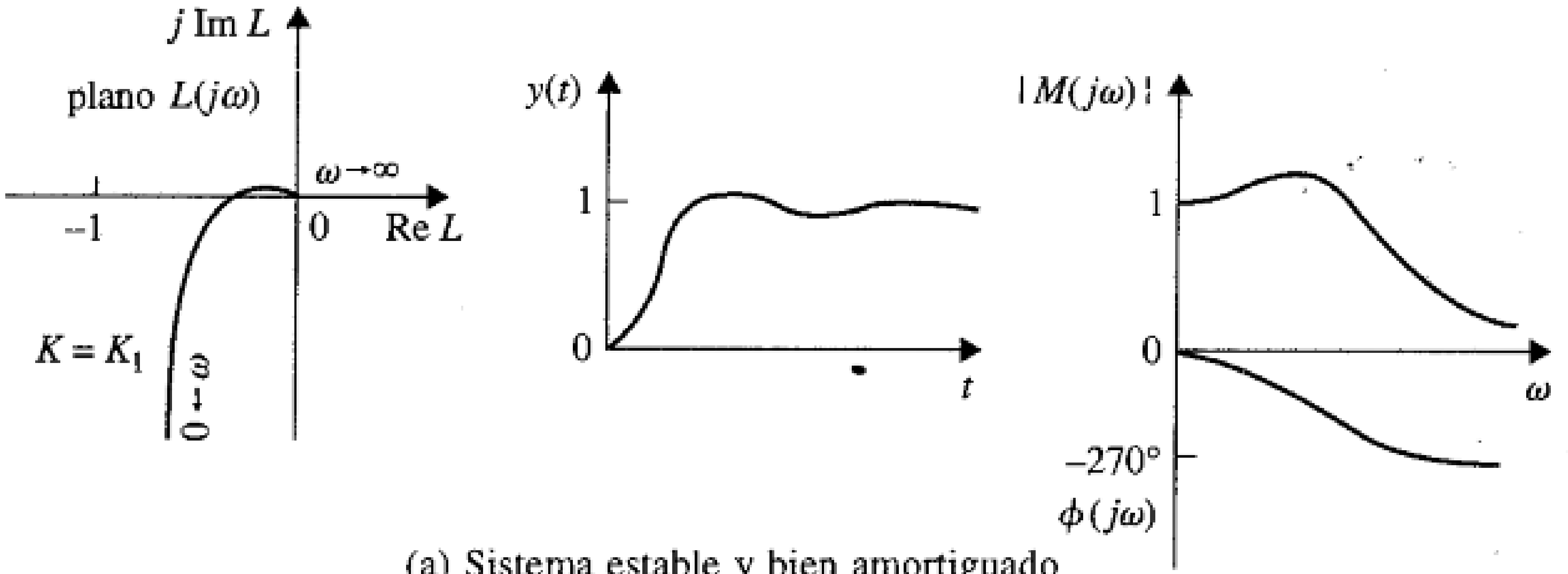
La traza polar o Diagrama de Nyquist

- Una ventaja de usar una traza polar es que representa, en una sola gráfica, las características de la respuesta en frecuencia de un sistema en el rango de frecuencia completo.

- Una desventaja es que la traza no indica en forma clara la contribución de todos los factores individuales de la función de transferencia en lazo abierto

La traza polar o Diagrama de Nyquist

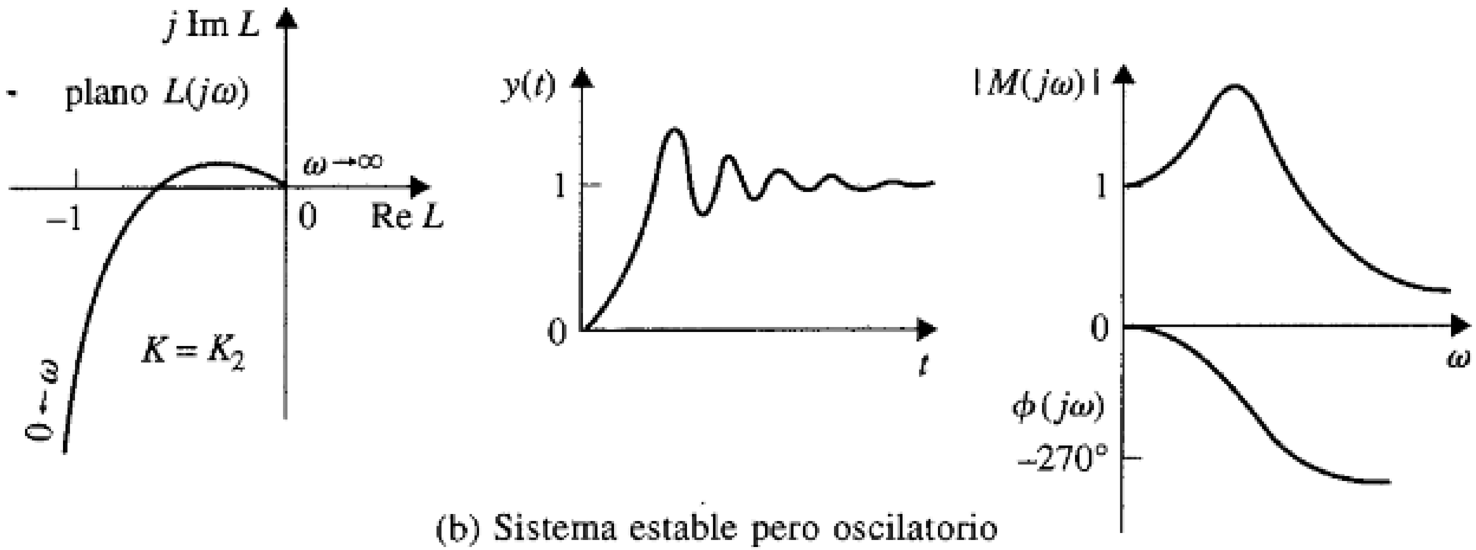
- La ganancia de lazo K es baja



(a) Sistema estable y bien amortiguado

La traza polar o Diagrama de Nyquist

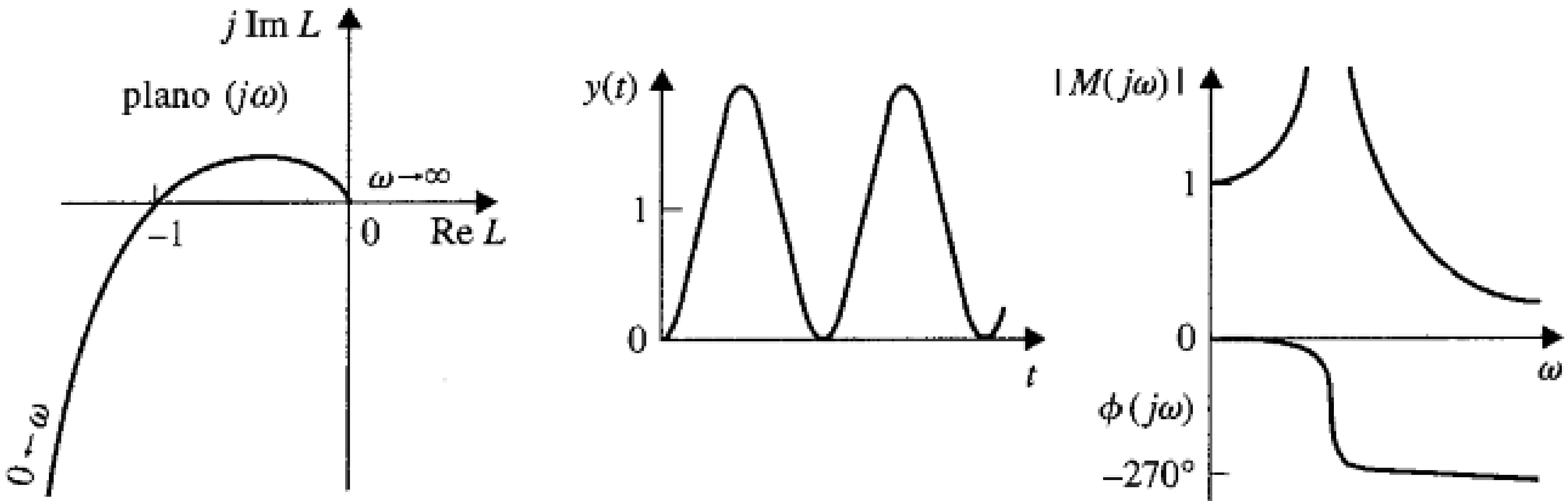
- La ganancia de lazo K se incrementa



(b) Sistema estable pero oscilatorio

La traza polar o Diagrama de Nyquist

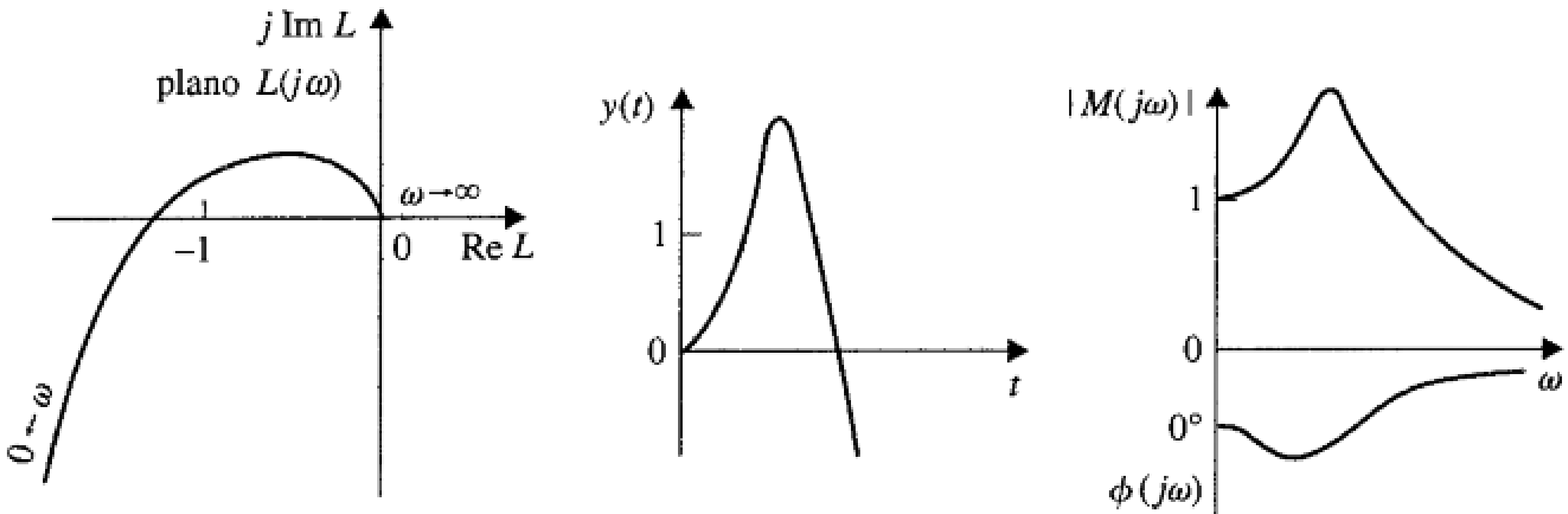
- La ganancia de lazo K se incrementa más



(c) Sistema marginalmente inestable

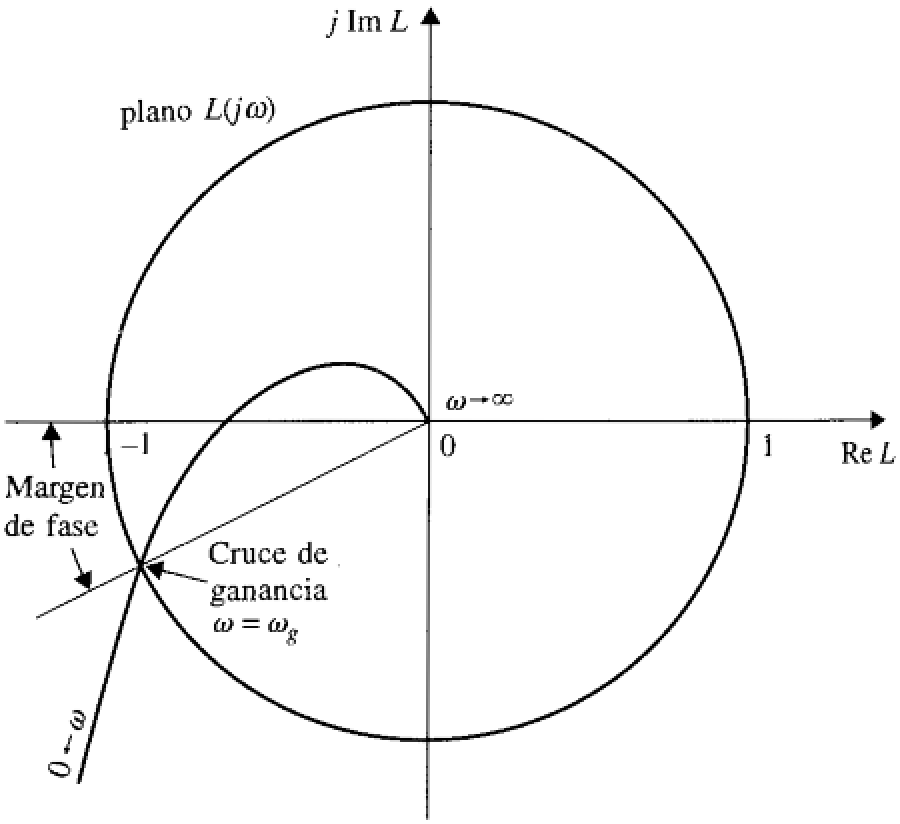
La traza polar o Diagrama de Nyquist

- La ganancia de lazo K es muy grande



(d) Sistema inestable

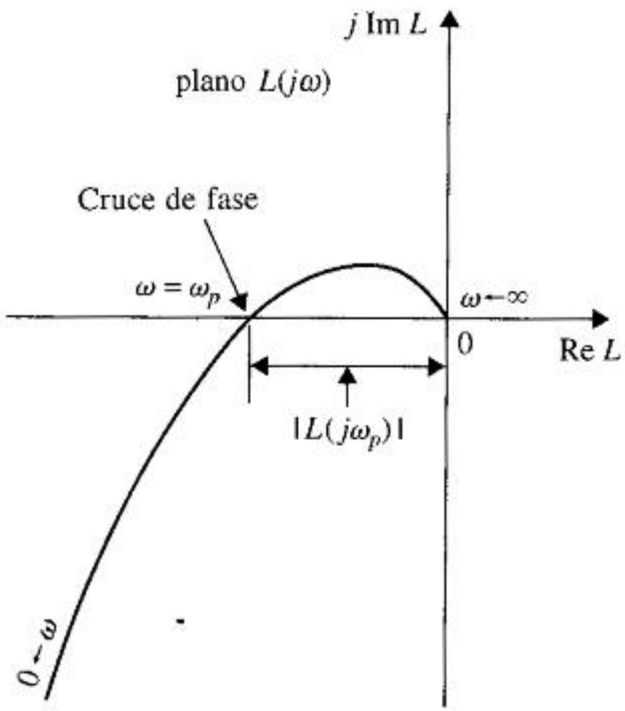
Márgenes de fase



Margen de fase (PM) $= \angle L(j\omega_g) - 180°$

El margen de fase (PM) se define como el ángulo en grados que la traza L(jω) se debe rotar alrededor del origen, para que el cruce de ganancia pase por el punto (–1, j0).

Márgenes de ganancia



$$\text{margen de ganacia} = \text{GM} = 20\log_{10}\frac{1}{|L(j\omega_p)|}$$
$$= -20\log_{10}|L(j\omega_p)|$$

Margen de ganancia es la cantidad de ganancia en decibeles (dB) que se pueden añadir al lazo antes de que el sistema en lazo cerrado se vuelva inestable.

Matlab

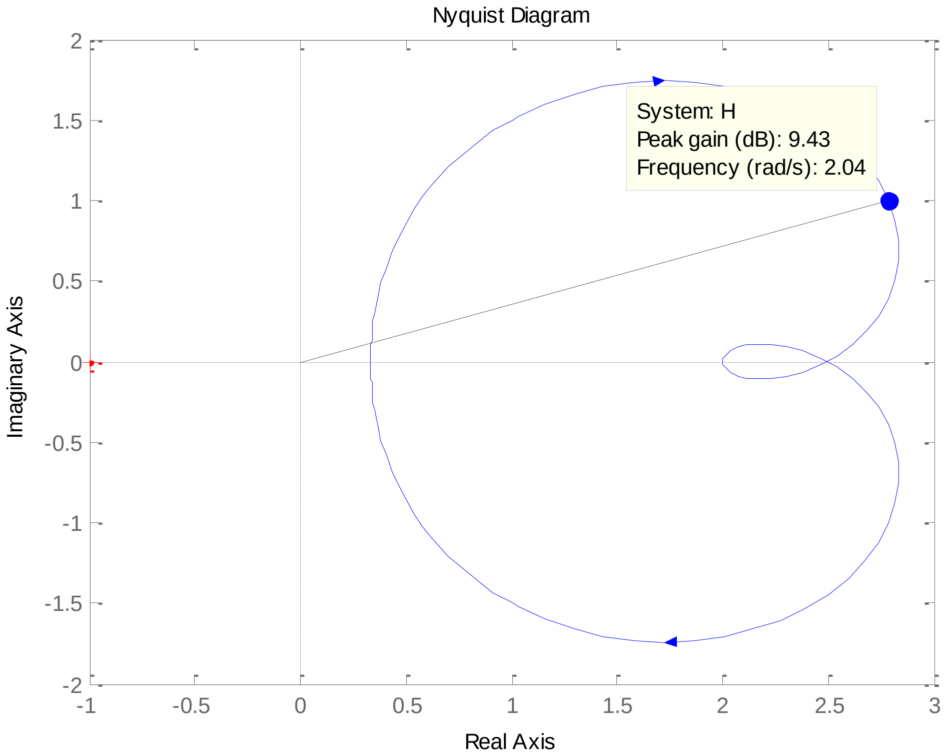
- El comando `nyquist` calcula la respuesta en frecuencia para sistemas en tiempo continuo, lineales e invariantes con el tiempo

Matlab

- Ejemplo

$$H(s) = \frac{2s^2 + 5s + 1}{s^2 + 2s + 3}$$

```
num=[2 5 1]
den=[1 2 3]
H = tf(num,den)
nyquist(H)
```



Escuela Colombiana de Carreras Industriales

ECCI

Escuela Tecnológica

Su Institución Universitaria

GRACIAS !!