

TEXTO GUIA

SISTEMAS DINAMICOS

Juan Carlos Vizcaíno Aponte

**Ingeniería de control y
automatización**

2023

PREFACIO

Este libro es una recopilación de contenido y ejercicios relacionados con el modelamiento matemático de sistemas dinámicos mecánicos, eléctricos, térmicos, entre otros, su representación y el modelamiento asociado a dicho sistema, que permite matemáticamente describir las relaciones dinámicas entre variables. Y el comportamiento de las mismas cuando se exponen a señales externas.

Así mismo, se expone el modelamiento en frecuencia que permite encontrar funciones de transferencia, lo que nos permite generalizar comportamientos y encontrar analogías entre sistemas, que pueden ser de diferentes estadios.

Simulación con circuitos electrónicos, donde por medio de la medición de corrientes y voltajes podemos predecir cómo se va a comportar un sistema de otra índole como mecánico o térmico. La analogía en el comportamiento de estos sistemas, nos permite predecir del funcionamiento de las variables presentes.

La simulación digital, por medio del software MATLAB, permite por medio de la COMMAND WINDOW o el SIMULINK, modelar sistemas tanto en el tiempo como en frecuencia para verificar comportamientos de las diferentes variables presentes.

Finalmente se trabajan elementos básicos del control como las generalidades de sistemas lineales de primer y segundo orden, exponiendo a su vez en que consiste un controlador y los efectos que pueden tener al ser incluidos en un modelamiento matemático; específicamente el cambio que produce en las respuestas del sistema.

El libro no pretende dar una explicación exacta de los propósitos del mismo, sino una visión del autor, que ha manejado y guiado la materia de sistemas dinámicos en la universidad ECCI, por lo que el alcance de este, llega hasta la temática que se trabaja en la materia semestralmente.

Finalmente el autor hace una dedicatoria especial a la Doctora Sofka Doukova, quien ha motivado su interés, por generar este tipo de publicaciones.

Introducción

Un sistema dinámico es un sistema cuyo estado evoluciona con el tiempo. Los sistemas físicos en situación no estacionaria son ejemplos de sistemas dinámicos, aunque también existen modelos económicos, biológicos, etc., que son también, sistemas dinámicos.

En relación a los sistemas dinámicos físicos cabe resaltar la diversidad de variables interrelacionadas en pares de la misma naturaleza que describen energía. Es allí donde podemos modelar matemáticamente los fenómenos dinámicos a partir de leyes físicas ya establecidas previamente por Newton o Bernoulli, entre muchos, y, encontrar analogías en el comportamiento de los diferentes sistemas físicos como mecánicos, térmicos, eléctricos. Un mismo modelo puede responder a distintas representaciones matemáticas y esto es dado a la perspectiva de análisis.

Las nuevas tecnologías han logrado la simulación, en donde se puede ver el comportamiento de las diferentes variables que intervienen en un sistema, variando los factores alternos que las afectan, de manera más eficiente ya que puede hacerse en tiempo real.

La estrategia utilizada para manipular el comportamiento de las variables frente a las perturbaciones es lo que conocemos como el control y pretende lograr patrones de comportamiento conforme dichas variaciones en el tiempo.

1. Modelamiento matemático

El modelamiento matemático de sistemas dinámicos consiste en encontrar una ecuación que represente el comportamiento de un sistema y las diferentes variables presentes como fuerzas, torques, voltajes, presiones, desplazamiento, velocidad, corriente, caudal entre muchas otras.

Esta ecuación diferencial se encuentra a partir de las leyes físicas establecidas por diferentes personajes de la historia como lo son Newton, Bernoulli, Ohm entre otros. Esta ecuación permite dar una explicación matemática al comportamiento de un sistema.

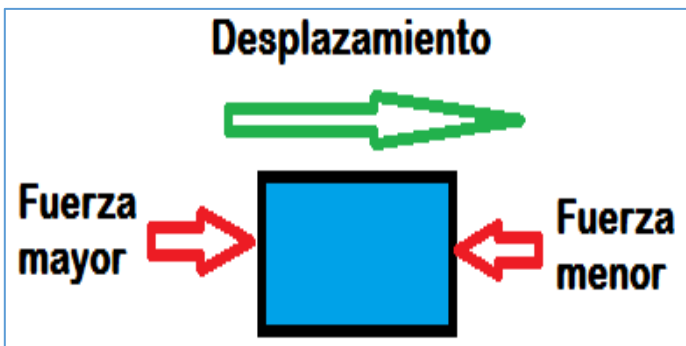
1.1. Sistemas mecánicos translacionales

La segunda ley de Newton, llamada “Fundamental de la Dinámica”, es la que determina una relación proporcional entre fuerza y variación de la cantidad de movimiento. Esta ley especifica que en un sistema dinámico, la sumatoria de fuerzas que actúan sobre un cuerpo de masa m , es igual el valor de esa masa multiplicada por la aceleración.

$$\sum F = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

En los sistemas mecánicos translacionales encontramos 2 variables básicas que son las fuerzas $F(t)$ y los desplazamientos $X(t)$. Estos desplazamientos producen a su vez velocidades y aceleraciones.

Si tenemos una diferencia de fuerzas $F(t)$ aplicadas sobre una masa se produce un desplazamiento $X(t)$. Estos desplazamientos producen a su vez velocidades y aceleraciones.



$F(t)$; Fuerza $\rightarrow x(t)$; Desplazamiento

$x(t) = x$; Desplazamiento

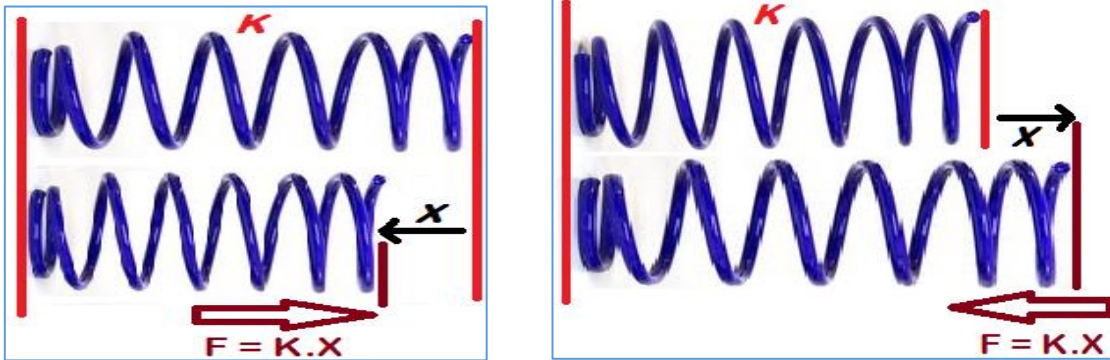
$\frac{dx(t)}{dt} = v(t) = \dot{x}$; Velocidad

$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = a(t) = \ddot{x}$; Aceleración

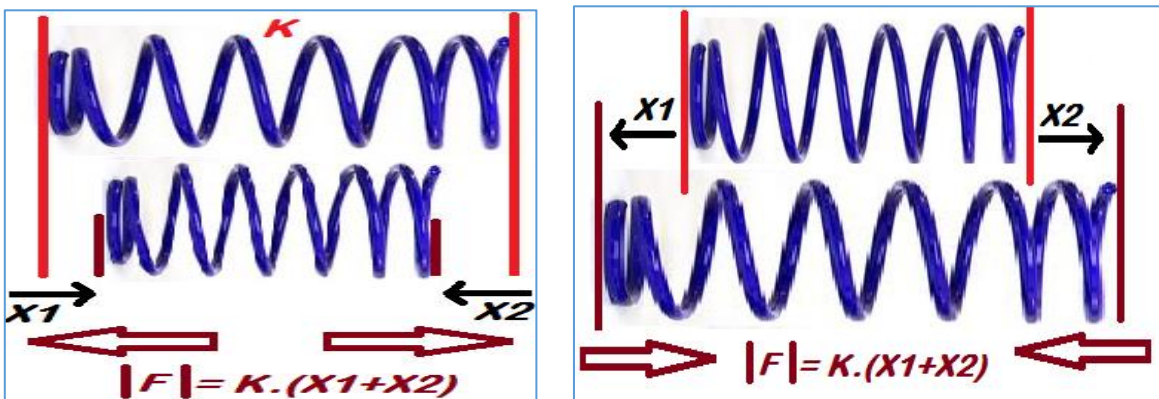
(Para abreviar la escritura de las ecuaciones diferenciales, trataremos las derivadas de las funciones con puntos arriba indicando el orden de la derivada).

1.1.1. Resortes (Propiedad elástica)

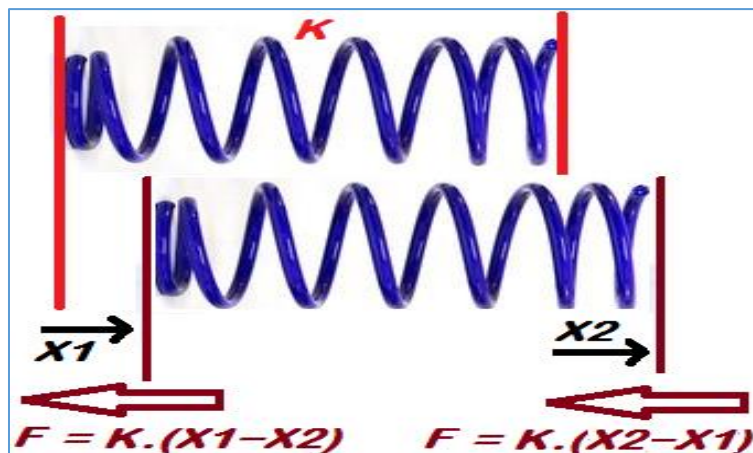
Cuando a un resorte, que posee una constante elástica k , le producimos un desplazamiento en uno de sus extremos, este genera una fuerza que reacciona a ese desplazamiento.



Cuando sus 2 extremos se desplazan en dirección contraria la fuerza se relaciona con los desplazamientos de la siguiente manera.

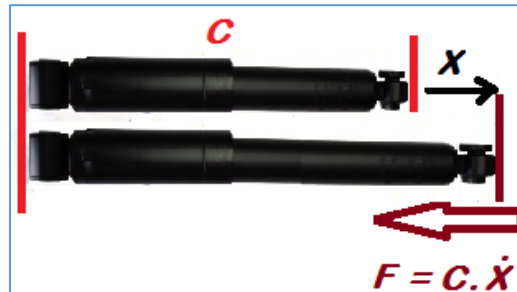


Cuando sus 2 extremos se desplazan en la misma dirección, dirección contraria la fuerza se relaciona con los desplazamientos de la siguiente manera.

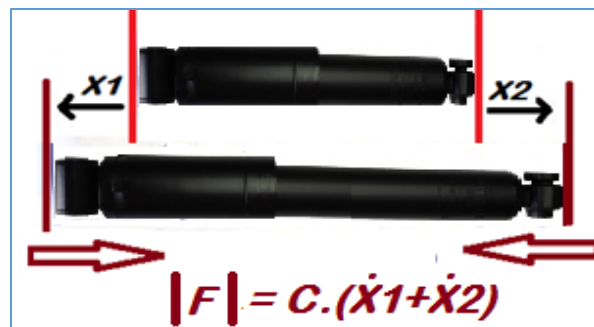


1.1.2. Amortiguadores (Propiedad de amortiguamiento)

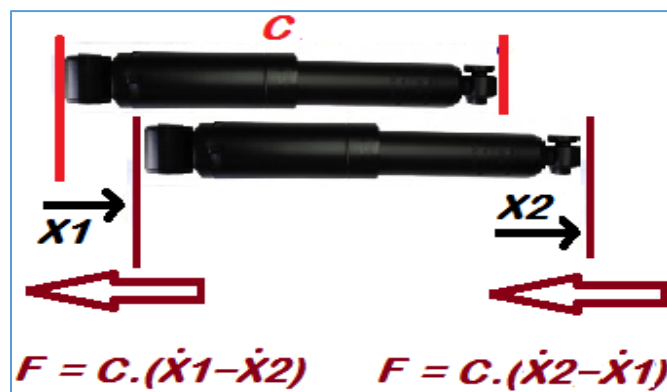
Cuando a un amortiguador, que posee una constante de amortiguamiento C , le producimos un desplazamiento en uno de sus extremos, este genera una fuerza que reacciona a la velocidad de ese desplazamiento.



De manera que el amortiguador genera una fuerza opuesta al desplazamiento en sus extremos y que su magnitud depende de la velocidad de este desplazamiento.

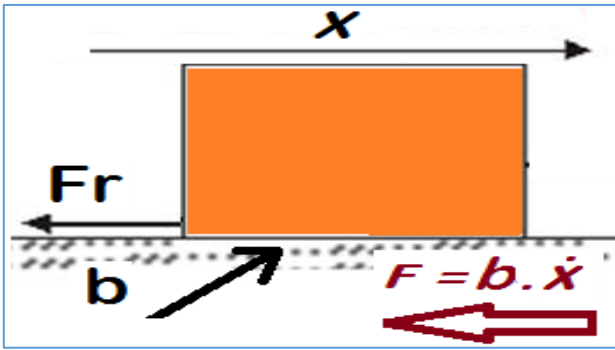


La magnitud de la fuerza que ejerce el resorte a partir del desplazamiento de sus extremos es:

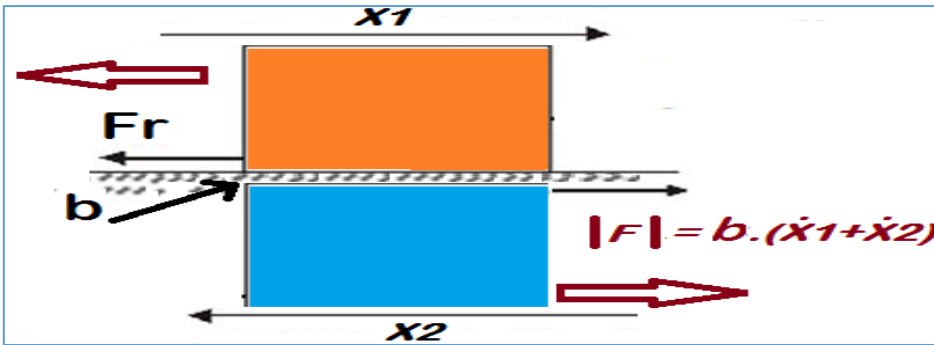


1.1.3. Rozamiento

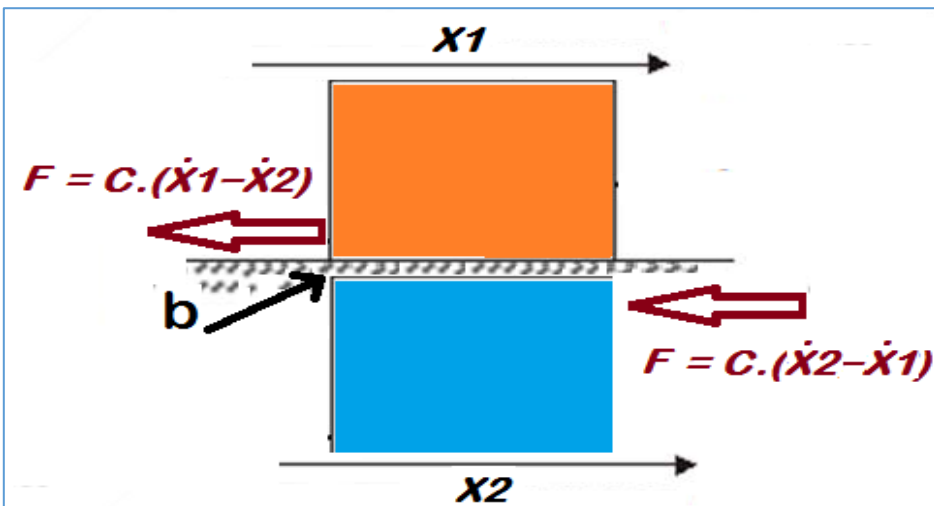
Cuando una superficie entra en contacto con otra se produce un rozamiento que a su vez genera una fuerza por rozamiento que se opone al desplazamiento, y su magnitud depende de la velocidad con que ocurre dicho roce.



De manera que el rozamiento genera una fuerza opuesta al desplazamiento en un punto



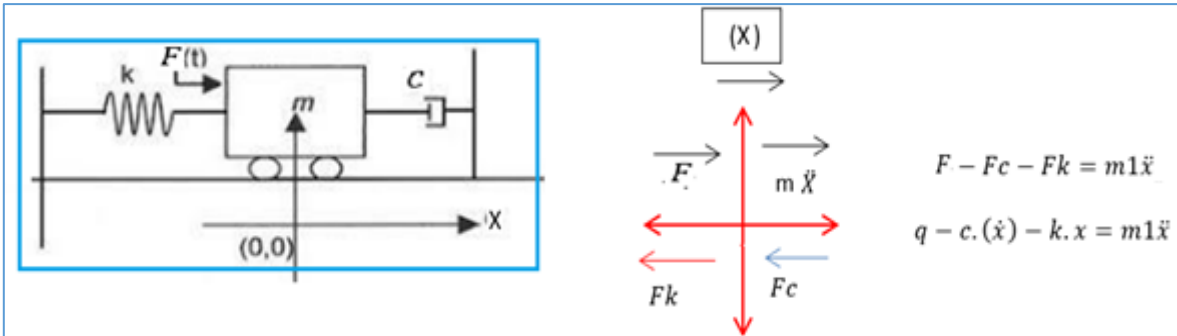
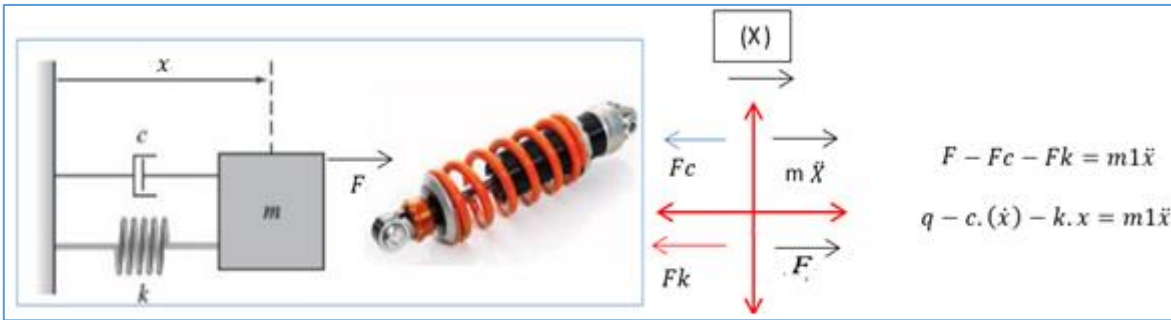
La magnitud de la fuerza que ejerce el rozamiento a partir de la velocidad del roce es:



1.1.4. Ejemplos

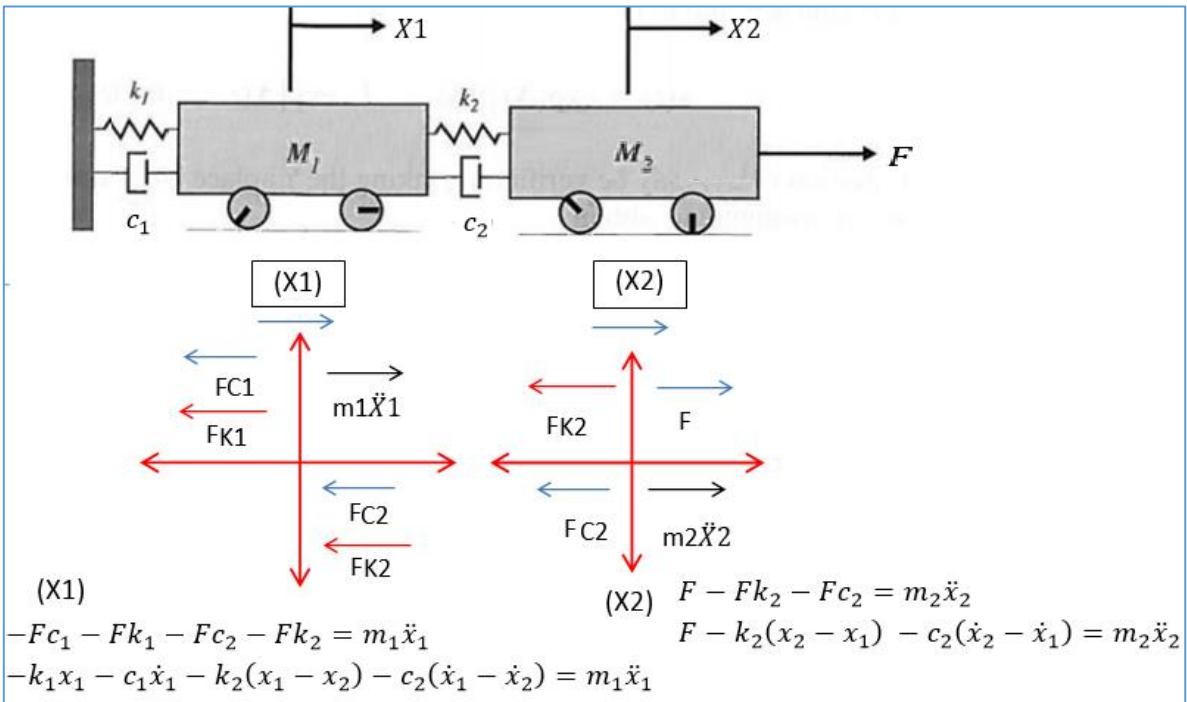
Para nuestro análisis realizamos la sumatoria de fuerzas. Encontrando la ecuación que representa la dinámica del sistema en el punto de desplazamiento.

Recuerde que la fuerza del resorte y amortiguador se oponen al desplazamiento.

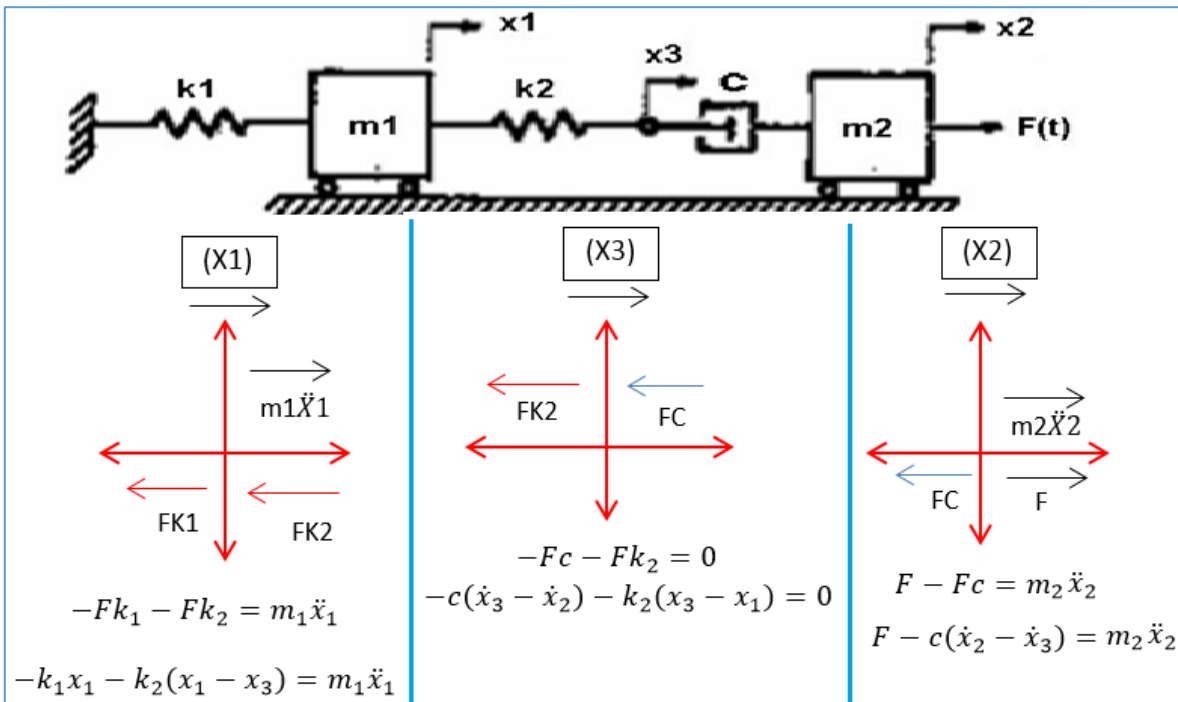


Debemos observar cada punto de desplazamiento de forma independiente y verificar las fuerza que afectan directamente la dinámica en dicho punto.

El siguiente ejemplo muestra dos masas sin rozamiento unidas por un arreglo resorte-amortiguador, y unido a la pared en uno de sus extremos

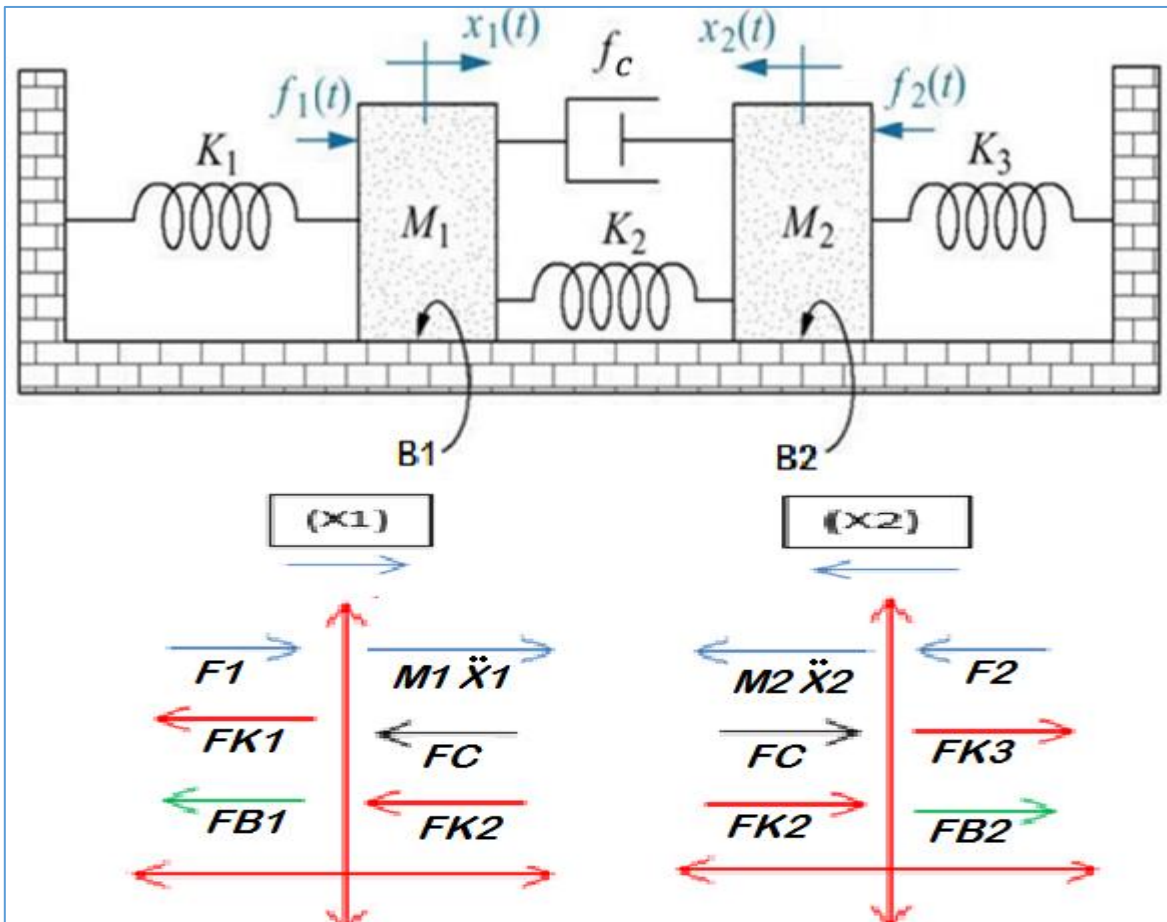


Nuestro análisis debe realizarse en cada punto de desplazamiento como lo muestra el siguiente ejemplo en donde existe un punto x_3 en donde se realiza un desplazamiento pero se asume una masa igual a cero en dicho punto.



En el siguiente ejemplo observamos el caso en el que los extremos de los elementos se desplazan en direcciones contrarias. Si se respeta el sentido de las flechas y los signos las ecuaciones quedaran correctamente planteadas.

El sentido de las fuerzas F_c y F_k cambian en cada uno de los diagramas, esto se debe a que siempre se oponen al desplazamiento en el punto de análisis.



(X1)

$$F1 - F_{K1} - F_{B1} - F_C - F_{K2} = m1 \ddot{x}1$$

$$F1 - K1(X1) - B1(\dot{X}1) - C(\dot{X}1 + \dot{X}2) - K2(X1 + X2) = M1 \ddot{X}1$$

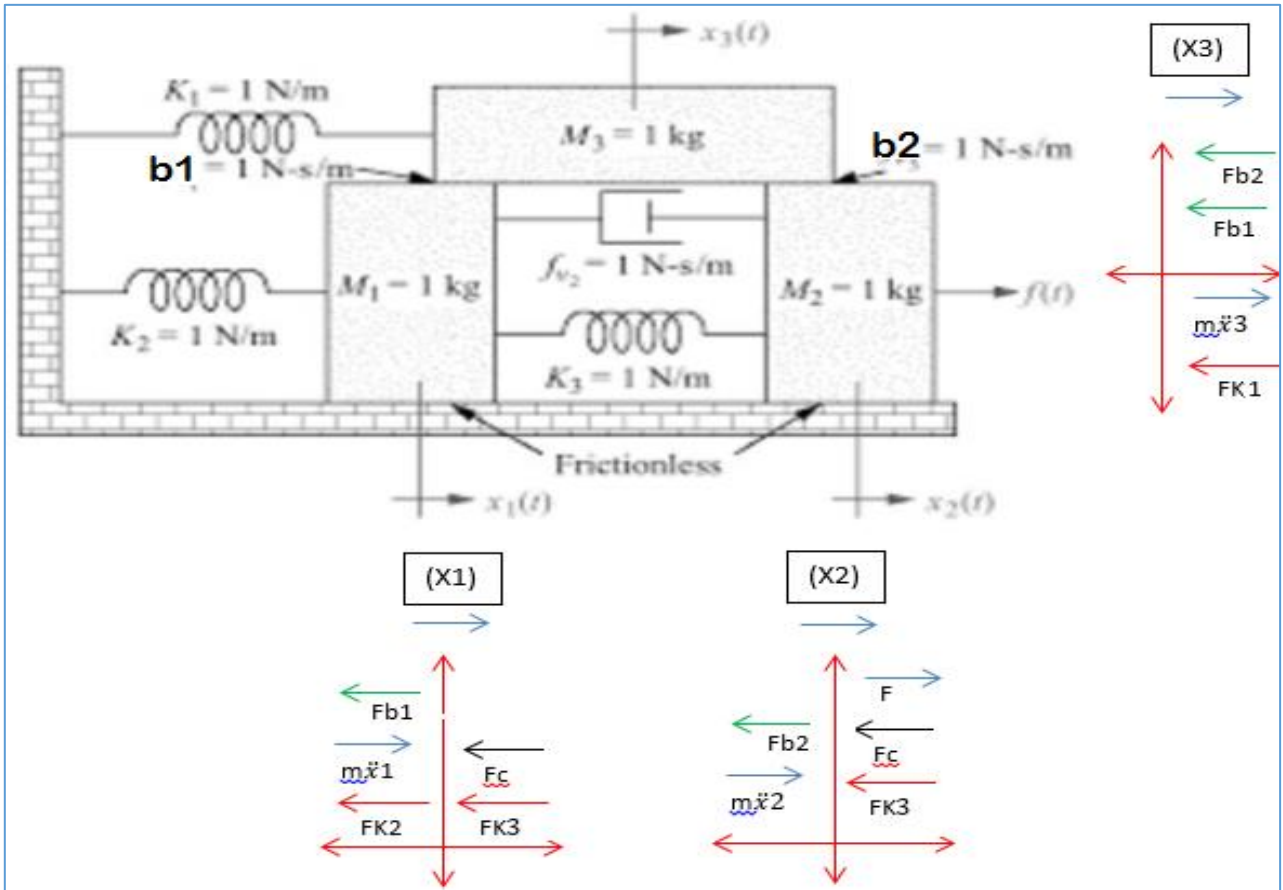
(X2)

$$- F2 + F_{K2} + F_C + F_{B2} + F_{K3} = - m2 \ddot{x}2$$

$$F2 - F_{K2} - F_C - F_{B2} - F_{K3} = m2 \ddot{x}2 \quad \text{(Cambio de signos)}$$

$$F2 - K2(X2 + X1) - C(\dot{X}2 + \dot{X}1) - B2(\dot{X}2) - K2(X2) = M2 \ddot{X}2$$

En el siguiente ejemplo el rozamiento se da entre 2 superficies en movimiento. Note que en el análisis de fuerzas, la magnitud de las fuerzas de rozamiento depende de los desplazamientos de las superficies correspondientes pero que además es visto desde el punto de analisis. Esto resulta muy importante para plantear de forma correcta las ecuaciones dinamicas



- (X1)

$$-F_{K2} - F_{K3} - F_C - F_{B1} = m\ddot{x}_1$$

$$-1(X_1) - 1(X_1 - X_2) - 1(\dot{X}_1 - \dot{X}_2) - 1(\dot{X}_1 - \dot{X}_3) = \ddot{X}_1$$
- (X2)

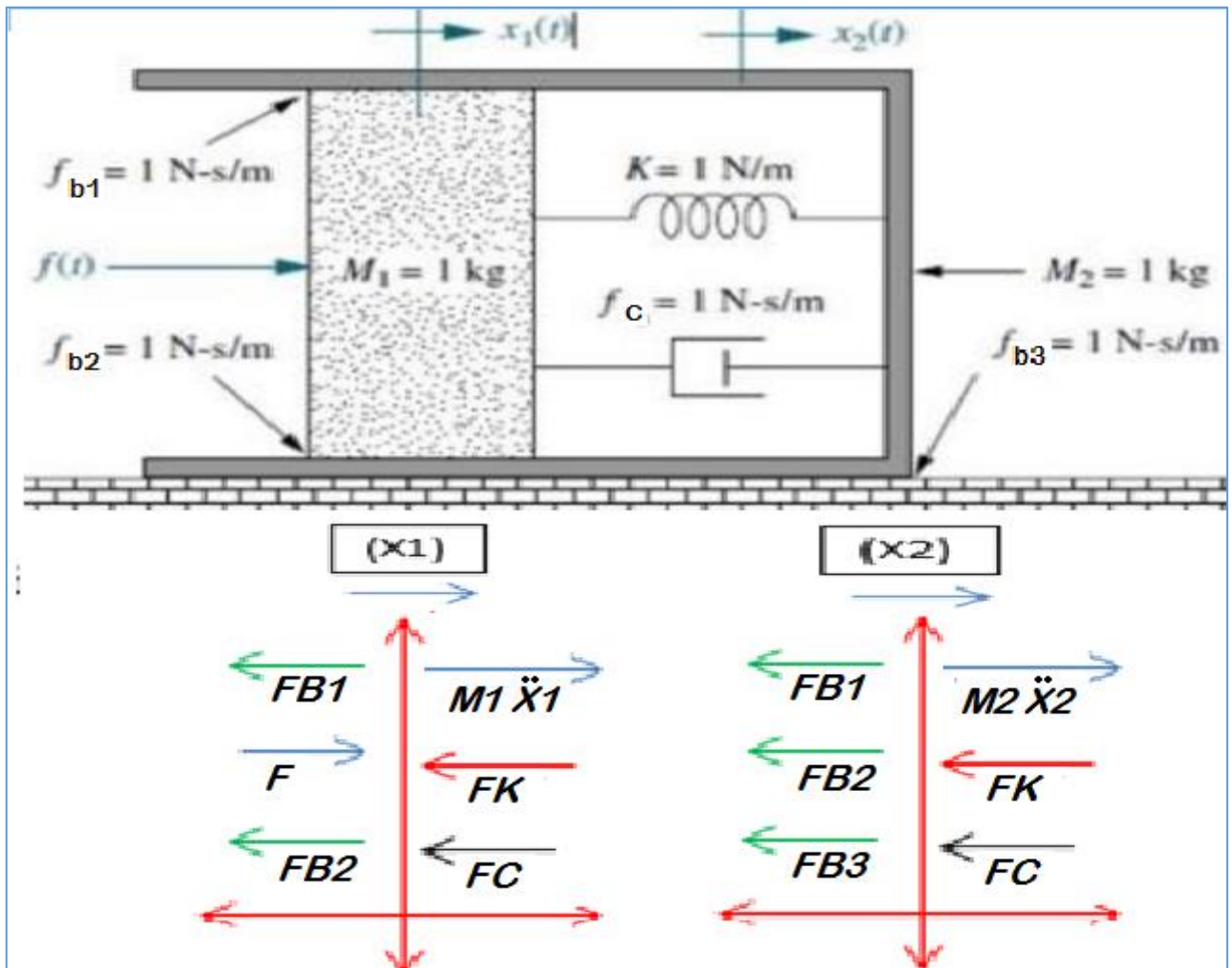
$$F - F_{K3} - F_C - F_{B2} = m\ddot{X}_2$$

$$F - 1(X_2 - X_1) - 1(\dot{X}_2 - \dot{X}_1) - 1(\dot{X}_2 - \dot{X}_3) = \ddot{X}_2$$
- (X3)

$$-F_{K1} - F_{B1} - F_{B2} = m\ddot{X}_3$$

$$-1(X_3) - 1(\dot{X}_3 - \dot{X}_1) - 1(\dot{X}_3 - \dot{X}_2) = \ddot{X}_3$$

El siguiente ejercicio es bastante interesante ya que vemos una masa que se mueve dentro de otra. Por efecto del rozamiento 1 y 2, al parecer la estructura externa se mueve también, la que a su vez tiene un rozamiento con la superficie del suelo. Así pues vemos como se trabaja el rozamiento entre superficies que se mueven y otras que no. La masa 2 sufre el efecto de 3 rozamientos y la masa 1 el efecto de 2. Adicionalmente los elementos K y C sufren desplazamientos diferentes en sus extremos pero en la misma dirección según lo plantea el gráfico.



(X1)

$$F - F_K - F_C - F_{B1} - F_{B2} = m1 \ddot{x}_1$$

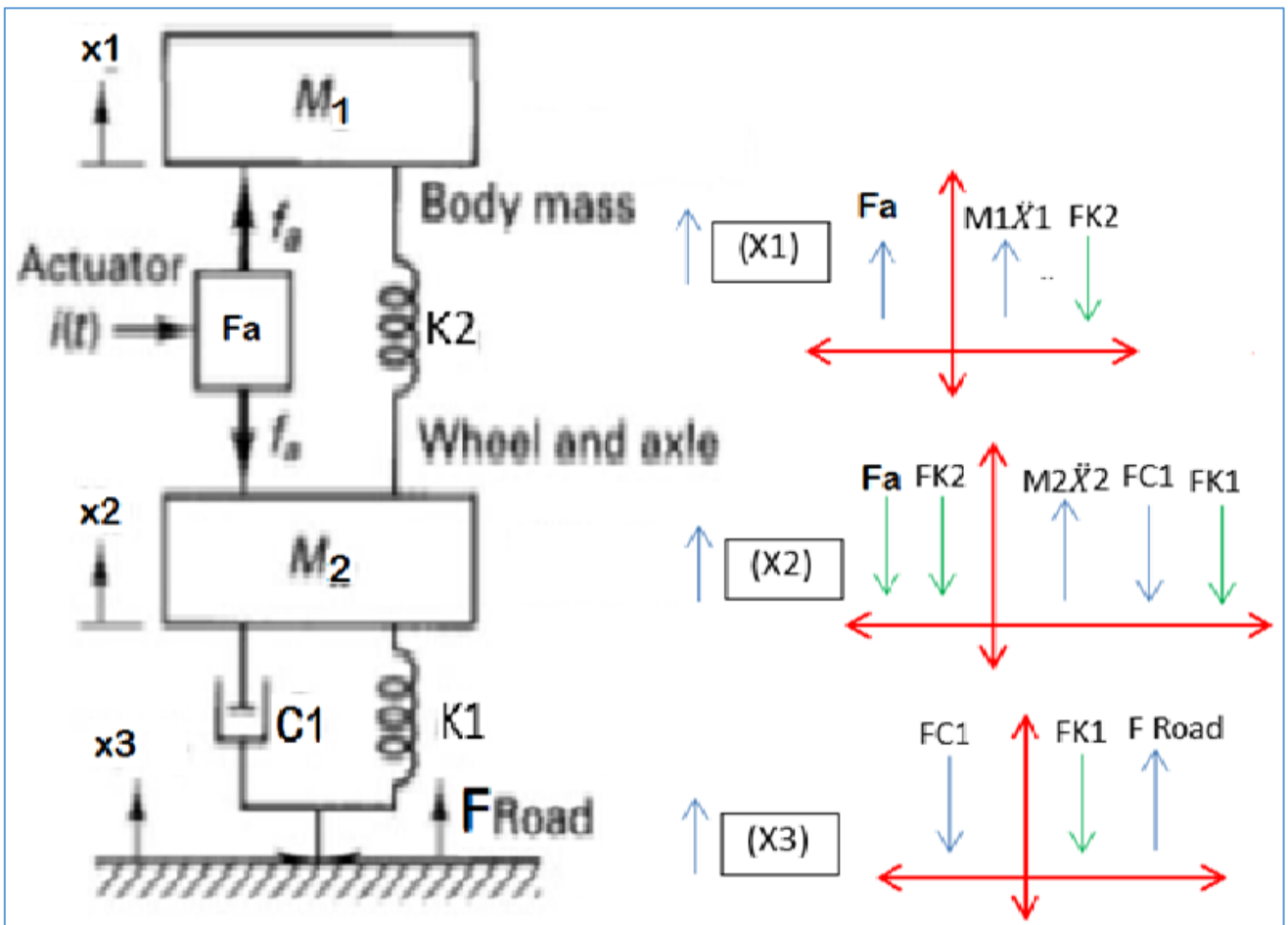
$$F - K(X_1 - X_2) - C(\dot{X}_1 - \dot{X}_2) - B1(\dot{X}_1 - \dot{X}_2) - B2(\dot{X}_1 - \dot{X}_2) = M1 \ddot{X}_1$$

(X2)

$$-F_K - F_C - F_{B1} - F_{B2} - F_{B3} = m2 \ddot{x}_2$$

$$-K(X_2 - X_1) - C(\dot{X}_2 - \dot{X}_1) - B1(\dot{X}_2 - \dot{X}_1) - B2(\dot{X}_2 - \dot{X}_1) - B3(\dot{X}_2) = M2 \ddot{X}_2$$

El siguiente ejercicio utiliza un actuador (Fa) que aplica una fuerza controlada de igual magnitud sobre las masas m1 y m2. Adicionalmente la fuerza que ejerce la carretera (F Road) aparece como variable en las ecuaciones.



- (X1)

$$F_a - F_{K2} = m_1 \ddot{x}_1$$

$$F_a - K_2(X_1 - X_2) = m_1 \ddot{x}_1$$
- (X2)

$$-F_a - F_{K2} - F_{K1} - F_{C1} = m_2 \ddot{X}_2$$

$$-F_a - K_2(X_2 - X_1) - K_1(X_2 - X_3) - C_1(\dot{X}_2 - \dot{X}_3) = m_2 \ddot{X}_2$$
- (X3)

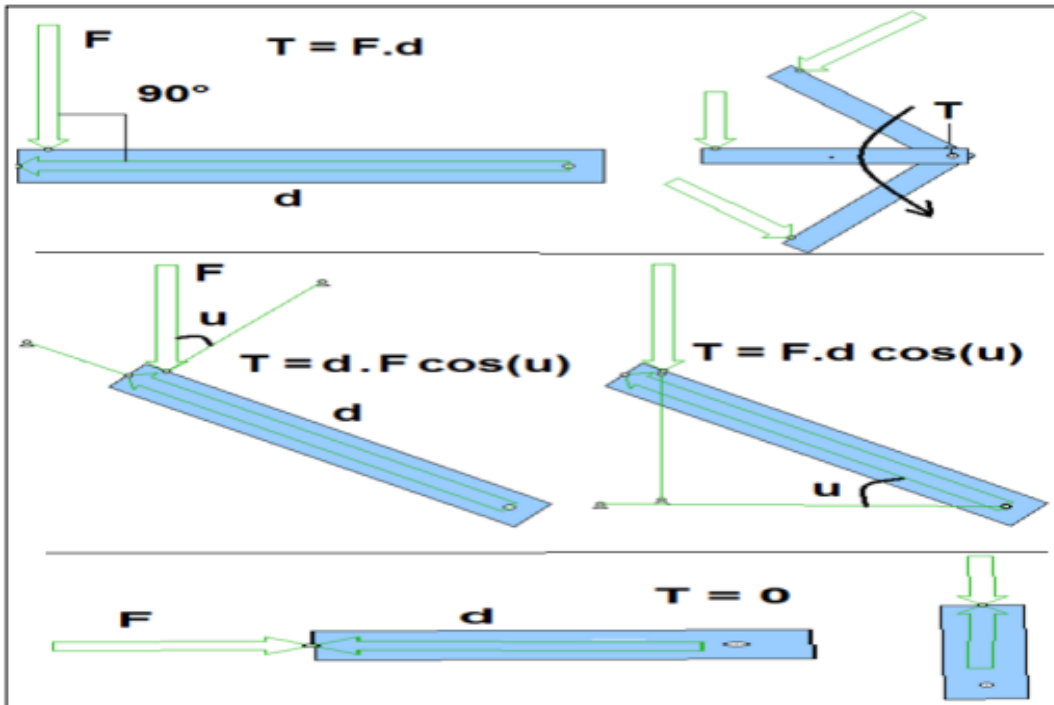
$$-F_{C1} - F_{K1} + Fr = 0$$

$$-C_1(\dot{X}_3 - \dot{X}_2) - K_1(X_3 - X_2) + Fr = 0$$

1.2. Sistemas mecánicos rotacionales

Podemos clasificar los movimientos de los cuerpos en el espacio como lineales o rotaciones. Cuando se transmite y transforma un movimiento existen diferentes opciones mecánicas que permiten saltar de movimientos lineales a rotaciones o viceversa como un sistema biela-manivela o piñón-cremallera. De igual manera cuando se utilizan mecanismos como las poleas, las ruedas de fricción o los engranajes se genera una transmisión y transformación de movimiento que, aunque se pasa de un movimiento giratorio a otro giratorio, se pueden lograr cambios en la velocidad de giro, sentido de giro y momento angular de fuerza. A continuación se da una explicación más detallada del comportamiento y utilidad de este tipo de mecanismos que transforman movimientos giratorios a giratorios variando dichas magnitudes y sentidos vectoriales

Cuando la fuerza es perpendicular al vector de distancia el torque es simplemente la magnitud de los vectores distancia y fuerza. Cuando los vectores: distancia y fuerza no son exactamente perpendiculares (90°) aparece un ángulo en la fuerza que proporciona la componente perpendicular entre fuerza y distancia o en su defecto. El torque en este caso puede ser visto de forma práctica como la componente cosenosoidal del uno de los 2 vectores. Cuando el ángulo (u) es de 0° o 180° el torque es igual a 0 dado en la definición de un producto vectorial



Cuando la fuerza es perpendicular al vector de distancia el torque es simplemente la magnitud de los vectores distancia y fuerza. Cuando los vectores: distancia y fuerza no son exactamente perpendiculares (90°) aparece un ángulo en la fuerza que proporciona la componente perpendicular entre fuerza y distancia o en su defecto. El torque en este caso puede ser visto de forma práctica como la componente cosenosoidal del uno de los 2 vectores. Cuando el ángulo (u) es de 0° o 180° el torque es igual a 0 dado en la definición de un producto vectorial

En los sistemas mecánicos rotacionales las variables son los Torques $T(t)$ los desplazamientos angulares $\theta(t)$. Estas rotaciones producen a su vez velocidades y aceleraciones.

$T(t)$; Torque $\rightarrow \theta(t)$; Desplazamiento angular

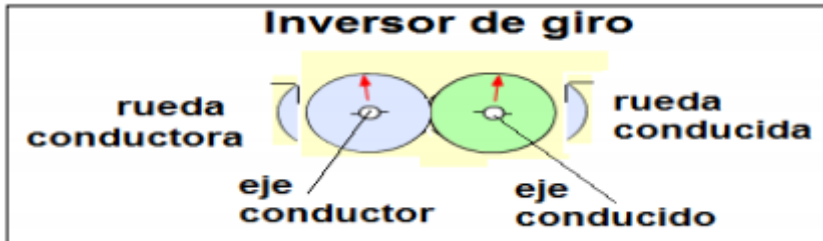
$\theta(t) = \theta$; Desplazamiento

$\frac{d\theta}{dt} = w(t) = \dot{\theta}$; Velocidad angular

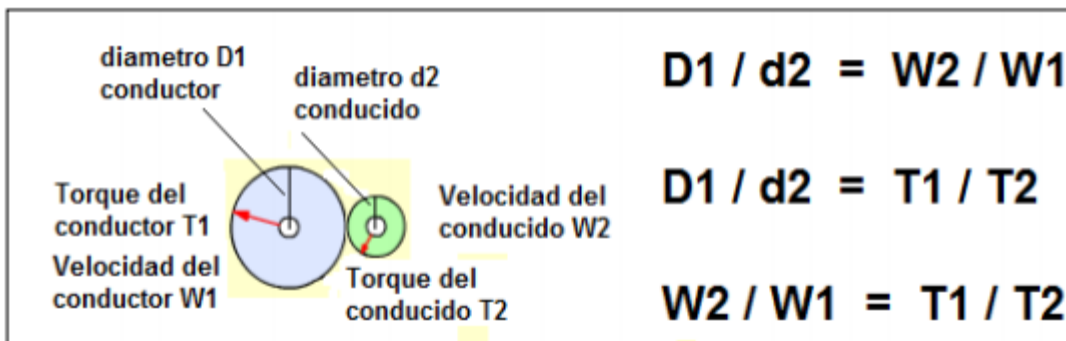
$\frac{d^2\theta}{dt^2} = a(t) = \ddot{\theta}$; Aceleracion angular

Mecanismos que transmiten torque y velocidad angular.

Ruedas de fricción. En este mecanismo se produce que la rueda a la que se transmite el movimiento giratorio gire en sentido contrario a quien produce el movimiento



En la transmisión de movimiento es posible obtener un cambio en la velocidad de giro (velocidad angular W) de la rueda a la que se transmite el movimiento y así mismo es posible cambiar en ella, el momento de fuerza (torque T) sobre el eje de giro.

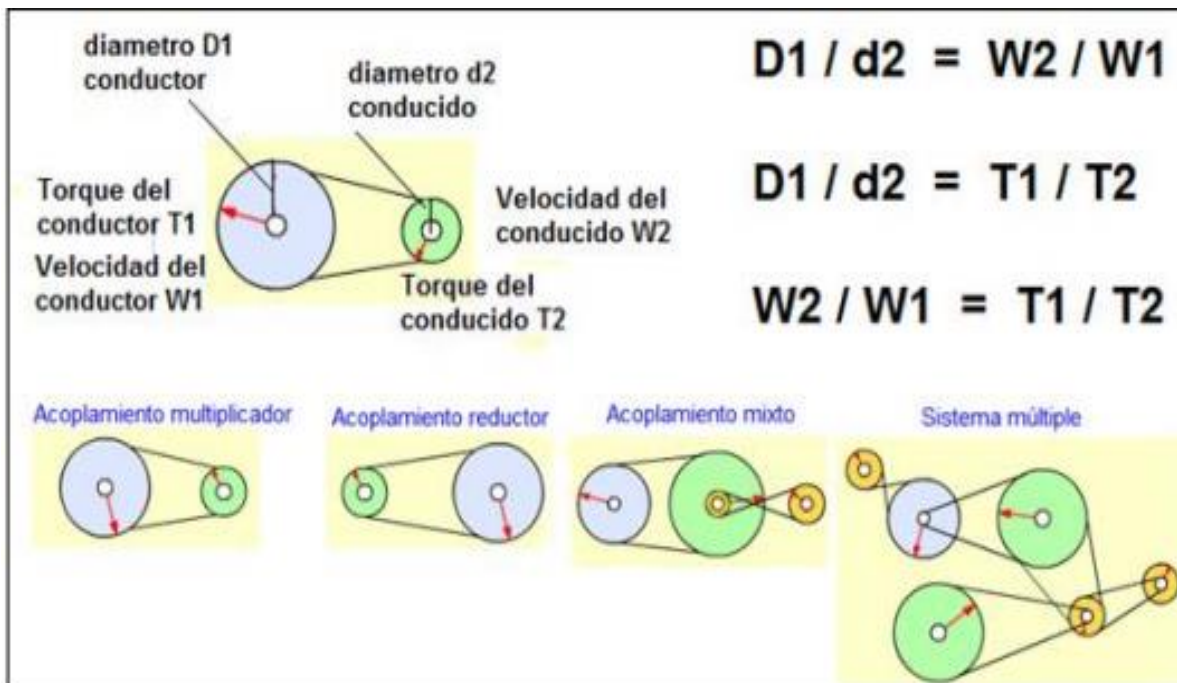


La relación de transmisión y cambio en los vectores de velocidad y torque son proporcionales a la relación de diámetros de las ruedas. Siendo esta relación de diámetros inversamente proporcional a las velocidades de giro $D1/d2 = W2/w1$ y la relación de los momentos de fuerza en los ejes directamente proporcional a la relación de diámetros $D1/D2 = T1/T2$

Polea-correa. Este arreglo mecánico permite transmitir un movimiento rotacional de un eje a otro por medio de una correa. Permite modificar tanto la velocidad de giro (velocidad angular W) como el momento de fuerza (torque T), y esta relación de transformación es directamente proporcional a la relación entre los diámetros de las poleas. La fuerza de rozamiento de la correa con las poleas es la que permite que el movimiento se transmita entre ellas.

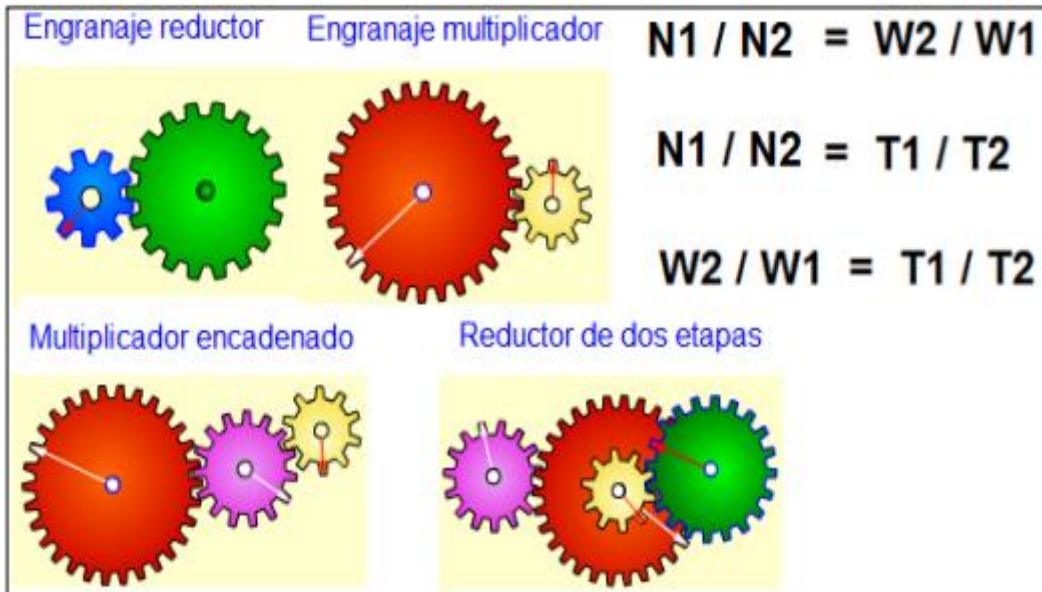


Dado que la transmisión se produce por medio de una correa esta puede ser adaptada de diferentes formas lo que permite que el movimiento circular se transmita en el mismo sentido o en sentido contrario



Al igual que las ruedas de fricción el modelamiento matemático afirma que la relación de diámetros es inversamente proporcional a la relación de velocidades $D1/D2= W2/W1$, y la relación de diámetros es directamente proporcional a la relación de momentos de fuerza en los ejes de giro $D1/D2 = T1/T2$. Podemos decir que tenemos sistemas multiplicadores o reductores de velocidad. Así como sistemas mixtos que brindan específicas cualidades de sentido de giro y relación de magnitudes vectoriales de velocidad y torque

Engranajes. Los engranajes son similares a las ruedas de fricción, pero en este caso cada una de las ruedas tiene dientes uniformes que se acoplan perfectamente de una rueda a la otra. Produciendo un mayor acople entre ruedas. En este mecanismo la transmisión de velocidad y torque se da por la fuerza que ejerce el diente de la rueda conductora contra el diente de la rueda conducida. Es indispensable que las características de los dientes de las ruedas tengan las mismas características que garantizan que se mantenga el acople y el movimiento. En este caso la cantidad de dientes de cada rueda es proporcional al diámetro, pero la relación de transmisión está dada por el número de dientes que posee cada rueda. De tal manera que la transmisión de velocidad entre una rueda y otra es inversamente proporcional al número de dientes (N) de las ruedas $N1/N2= W2/W1$ y la relación de los momentos de fuerza en los ejes directamente proporcional al número de dientes $N1/N2 = T1/T2$



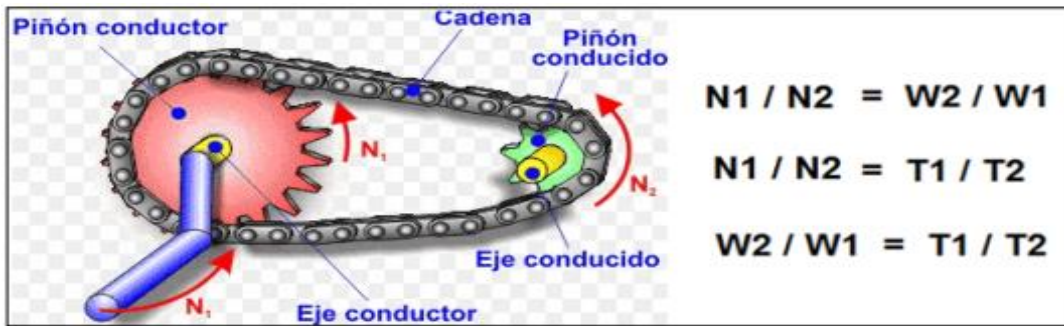
La figura muestra diferentes arreglos de engranajes con los que se logra tanto transmisión de velocidad como de torque así como inversiones de giro en los movimientos.

Tornillo sin fin-corona. El mecanismo tornillo sin fin-corona es una aplicación de los engranajes, pero permite una transmisión de fuerza y movimiento circular entre ejes perpendiculares. Este tipo de transmisión hace que, por medio de un tornillo sin fin, una corona (engranaje) cuyos dientes encajan perfectamente en el paso del tornillo sin fin genera la transmisión de movimiento. En este caso se especifica cuantos dientes de corona pasan en un giro del tornillo para calcular las relaciones específicas. Con este mecanismo, se logra transmitir torque y velocidad con relaciones de transmisión muy elevadas.



El tornillo sin fin corona funciona igual que los engranajes pero las relaciones de transmisión que logran conseguirse son bastante elevadas dado que $N1$ es mucho menor en relación a $N2$

Cadena – piñón. Análogamente a las ruedas de fricción y las poleas esta aplicación de los engranajes permite que no exista contacto físico de las ruedas dentadas, y la transmisión de movimiento se realiza por medio de una cadena. Los eslabones de la cadena encajan perfectamente en los dientes de la rueda dentada y esto permite hacer un acople entre los dientes de cada rueda. Las relaciones de Maestría en Tecnologías de la Información Aplicadas a la Educación – MTIAE 78 Facultad de Ciencia y Tecnología Departamento de Tecnología velocidad y torque se conservan al igual que en los engranajes y dependerá del número de dientes de cada rueda.



El mecanismo de cadena piñón es funcionalmente tal como los engranajes, pero la transmisión es por medio de una cadena. A diferencia de las poleas unidas por correas, aquí se evita la fricción con lo que se hace más confiable y estable el sistema

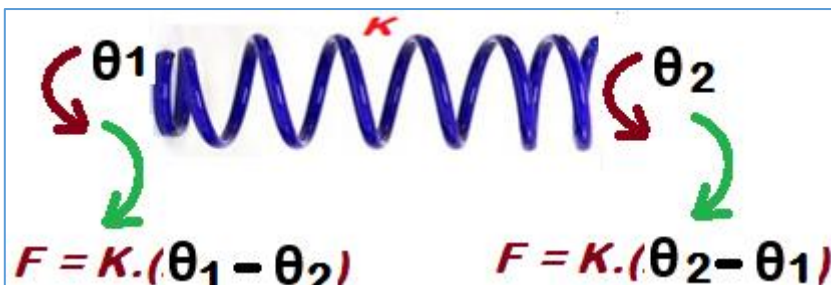
Elementos presentes en sistemas rotacionales

1.2.1. Constante elástica

Cuando a un resorte, que posee una constante elástica k , le producimos un desplazamiento en uno de sus extremos, este genera un torque que reacciona a ese desplazamiento.



De manera que el resorte genera una fuerza opuesta al desplazamiento en sus extremos



La magnitud de la fuerza que ejerce el resorte a partir del desplazamiento de sus extremos es:

1.2.2. Dámper

Se forma similar a un amortiguador (movimientos lineales), este elemento aparece como una oposición al movimiento, pero dependiente de la velocidad angular. Cuando a esta propiedad, que posee una constante "b", le producimos un desplazamiento en uno de sus extremos, este genera una fuerza que reacciona a la velocidad de ese desplazamiento.

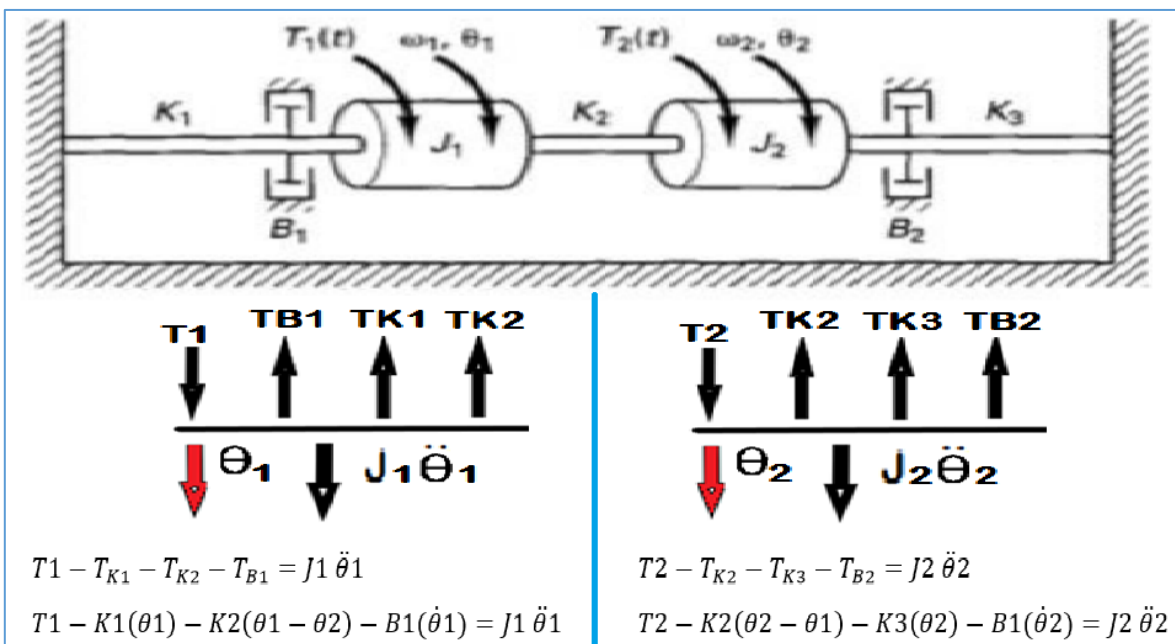
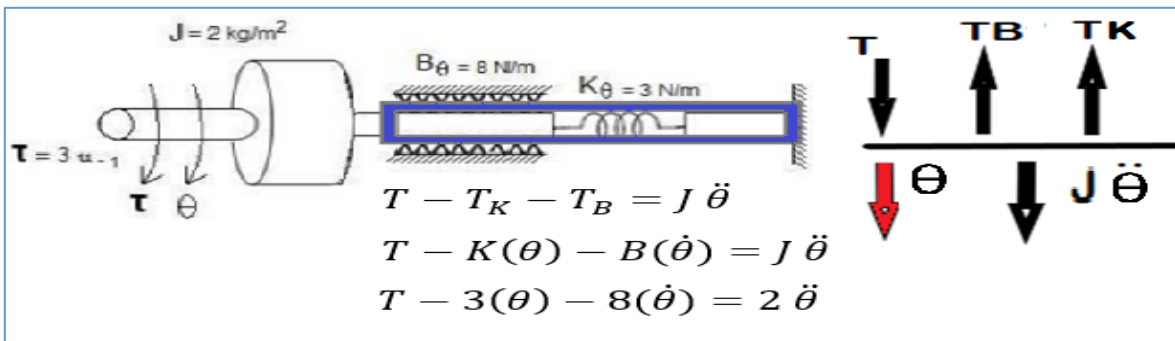
1.2.3. Rozamiento

Cuando una superficie entra en contacto con otra se produce un rozamiento que a su vez genera una fuerza por rozamiento que se opone al desplazamiento, y su magnitud depende de la velocidad con que ocurre dicho roce.

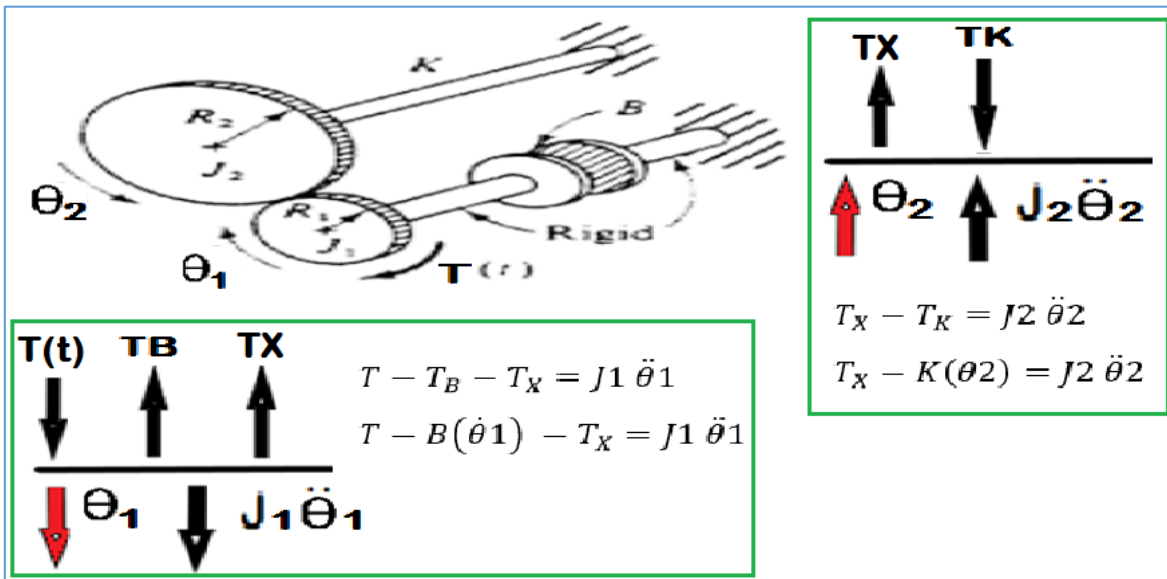
1.2.4. Ejemplos

La 2 ley de Newton especifica que en un sistema dinámico la sumatoria de torques es igual a la inercia multiplicada por la velocidad angular.

$$\sum T = J \frac{d^2\theta}{dt^2}$$



En el siguiente ejemplo apreciamos un arreglo de engranajes o ruedas de fricción. Al hacer el análisis dinámico tomamos en cuenta que el torque se aplica en la inercia J_1 y de allí el rozamiento B se opone al desplazamiento, así como el elemento en donde se transmite un torque (T_x) que también se opone. Al observar el desplazamiento de la inercia J_2 se observa que el desplazamiento lo produce el torque transmitido (T_x) y allí se opone la fuerza elastica del soporte (K). Dado que existe una inversión de giro y que los desplazamientos de las inercias son en dirección contraria es importante que se establezca cual sentido se maneja positivo y cual negativo, la importancia radica en tomar la fuerza de la inercia en el sentido del desplazamiento y las demás fuerzas en el sentido referencial con dicho movimiento. Las ecuaciones serian de la siguiente manera.



Dado que el torque transmitido (T_x) no es variable externa de entrada debemos expresarla en términos de las variables de desplazamiento y entrada $T(t)$ definidas en el modelo, y recordando que los radios R_1 y R_2 son conocidos (constantes en el sistema). De esta manera las ecuaciones dinámicas quedarían de la siguiente manera:

(θ_1)

(θ_2)

$T_x = J_2 \ddot{\theta}_2 + K(\theta_2)$

$T_x = \frac{T R_2}{R_1}$

(θ_1)

$T - B(\dot{\theta}_1) - T_x = J_1 \ddot{\theta}_1$

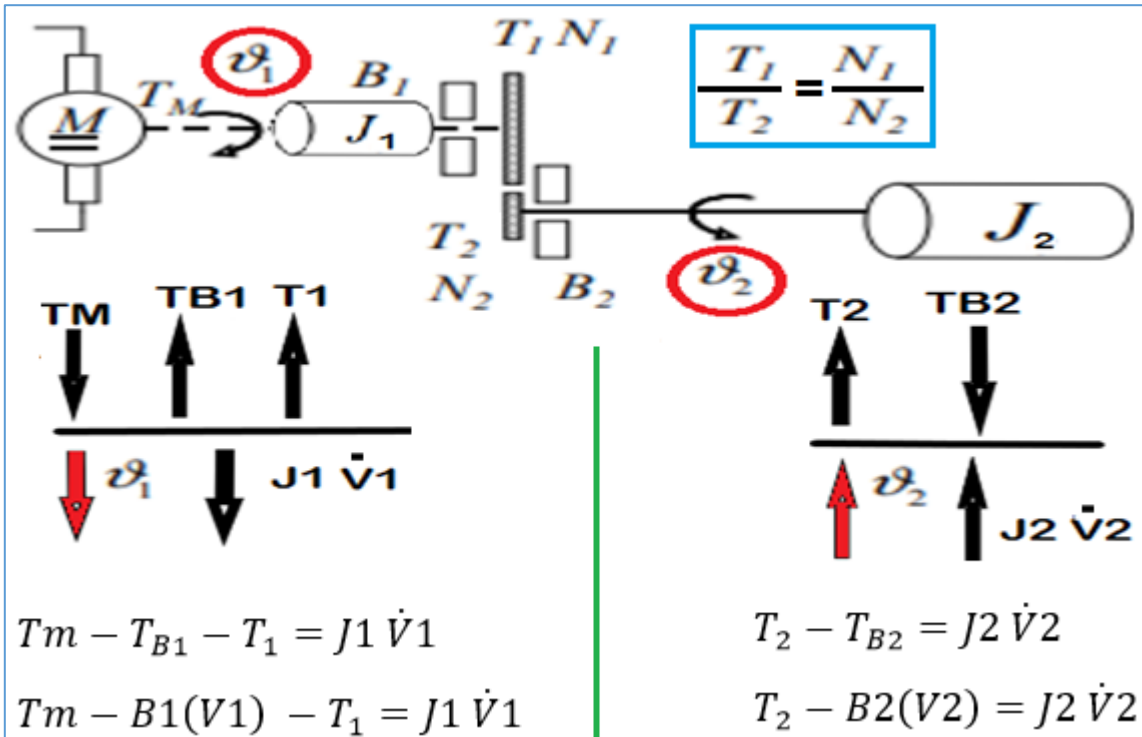
$T - B(\dot{\theta}_1) - [J_2 \ddot{\theta}_2 + K(\theta_2)] = J_1 \ddot{\theta}_1$

(θ_2)

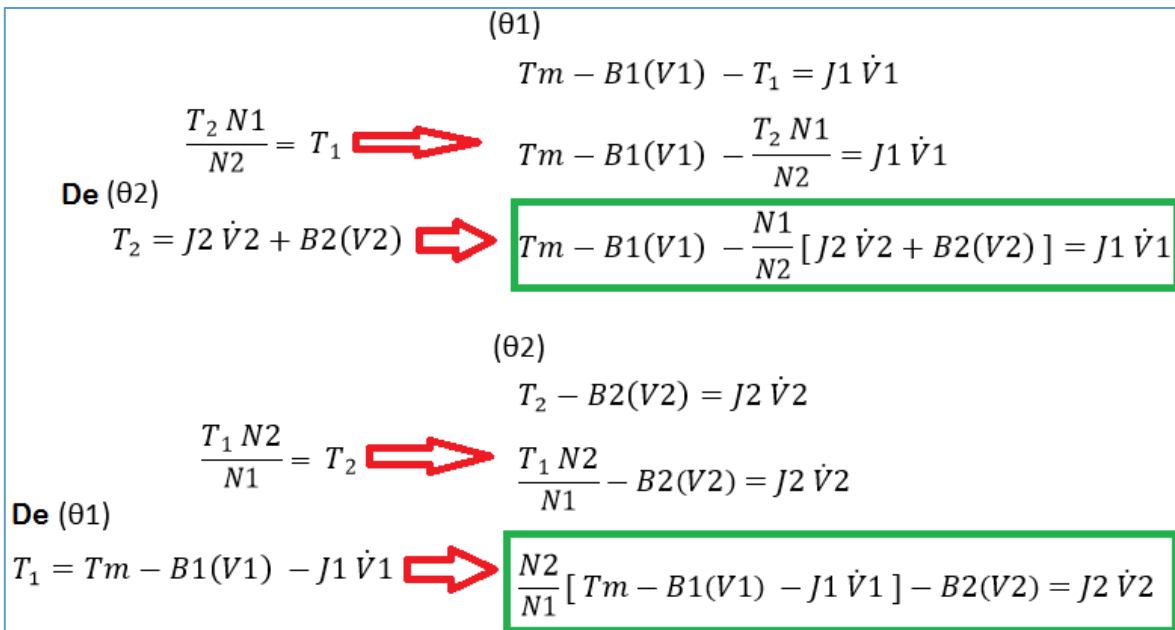
$T_x - K(\theta_2) = J_2 \ddot{\theta}_2$

$\frac{T R_2}{R_1} - K(\theta_2) = J_2 \ddot{\theta}_2$

El siguiente ejercicio realiza la ecuaciones pero tomando la velocidad angular como la variable de modelamiento en el arreglo de engranajes en donde la relación de transmisión se trabaja en función del número de dientes N_1 y N_2 .



A fin de plantear nuestras ecuaciones en función de las variables de giro, los elementos de torque T_1 y T_2 deben expresarse en términos de los elementos de giro y las variables de entrada.



1.3. Sistemas mecánicos mixtos

Las Fuerzas $F(t)$ y los Torques $T(t)$ pueden ser generados por diferentes factores. Por ejemplo una Presión puede generar una Fuerza a partir de la relación Fuerza = Presión x Área.

Cuando tenemos sistemas mecánicos que incluyen movimientos, tanto lineales, como angulares, existen unas relaciones que pueden beneficiarnos para el análisis matemático y modelamiento.

- a. Torque = distancia x Fuerza

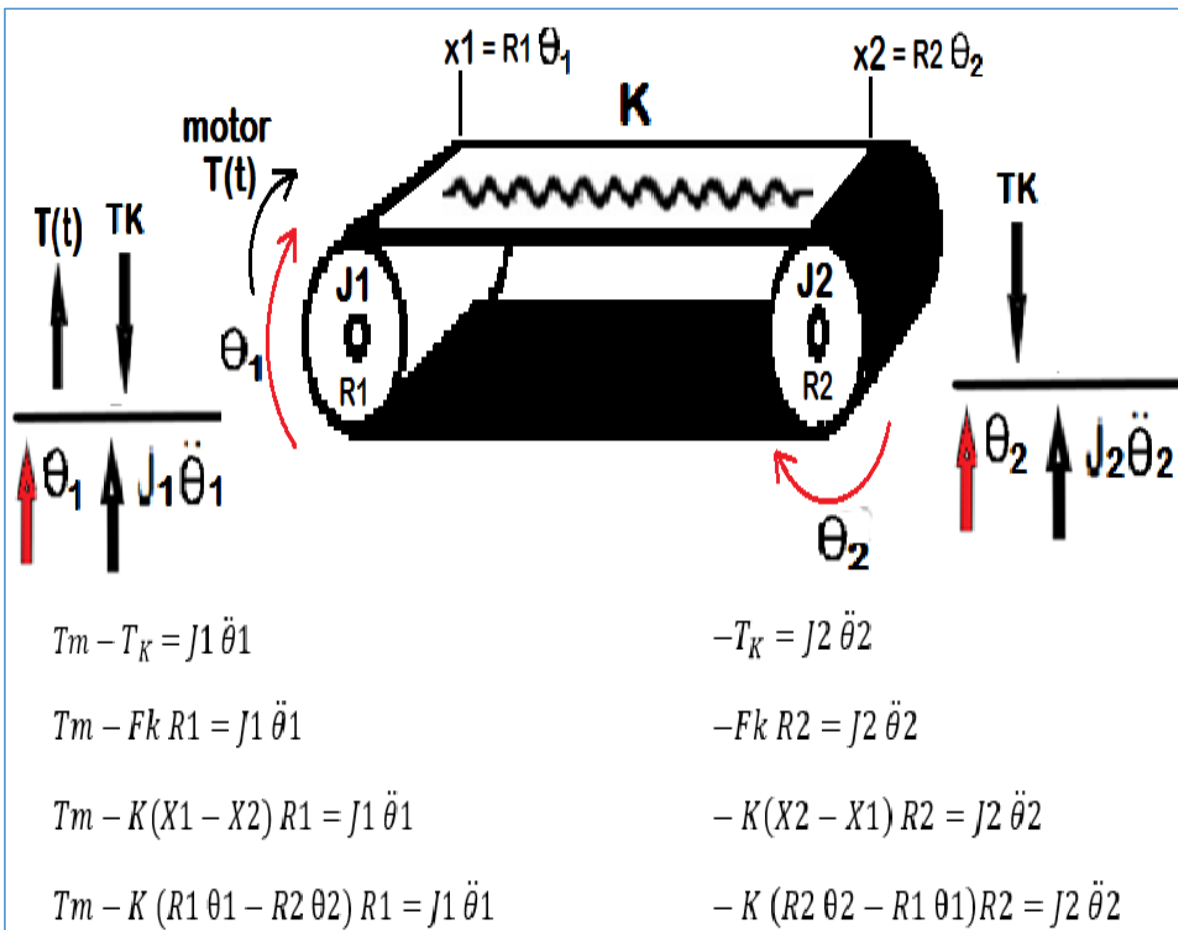
$$T = d \times F$$

- b. Desplazamiento = radio x Angulo

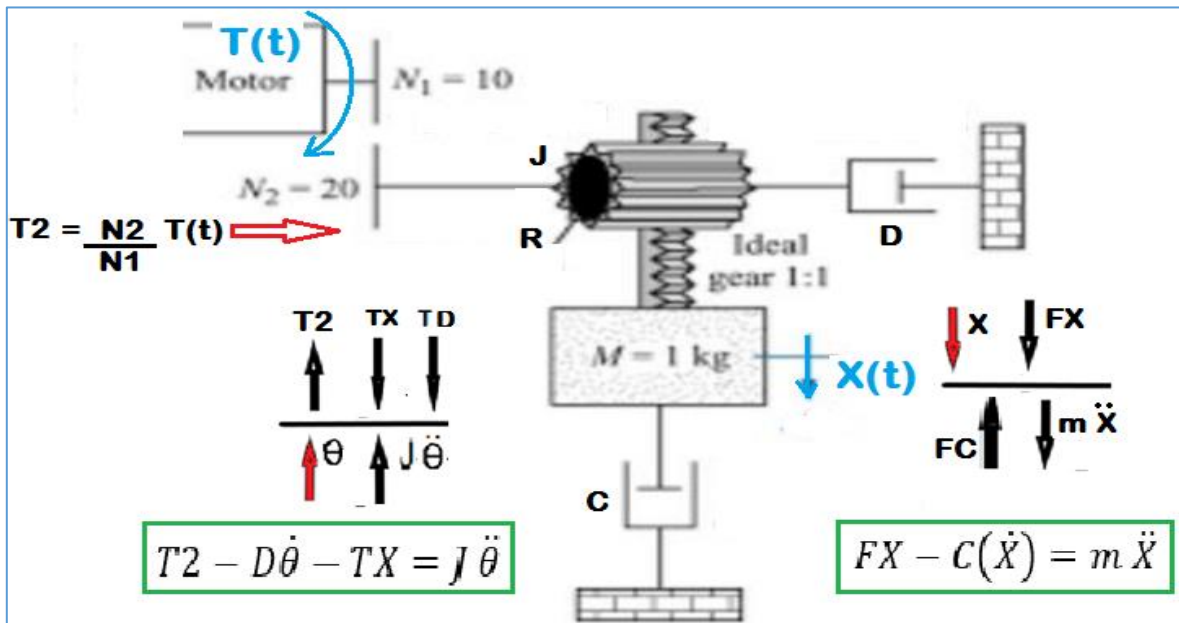
$$X = r \times \theta$$

1.3.1. Ejemplos

En el ejemplo de banda transportadora, vemos la banda como una elasticidad de constante K y allí debemos realizar traslados de movimientos angulares a lineales y viceversa para poder realizar el modelo en términos de una entrada $T(t)$ que simula el torque de un motor y los desplazamientos angulares de cada rodillo. Si asumimos que $R1 = R2$ el torque producido por esta fuerza elastica es la misma en cada extremo (TK).



El siguiente ejercicio propone encontrar una ecuación que relacione el torque del motor $T(t)$ y el desplazamiento de la masa $X(t)$. Un motor acoplado directamente a una transmisión donde se desprecia la inercia de las partes. Luego un arreglo piñón-cremallera. Se propone en el piñón una oposición tipo dámper (D) que da una oposición a la rotación que depende de la velocidad angular.



Luego de tener las 2 ecuaciones las podemos fusionar y eliminar las variables no deseadas como T_2 , T_X , F_X y θ , para dejar la ecuación deseada en términos de $T(t)$ y $X(t)$.

(θ)

$$T_2 - D\dot{\theta} - T_X = J\ddot{\theta} \quad \Rightarrow \quad T_2 = \frac{N_2}{N_1} T(t) \quad \text{Y} \quad T_X = F_X (R)$$

ASI: $\frac{N_2}{N_1} T(t) - D\dot{\theta} - F_X (R) = J\ddot{\theta}$

(X)

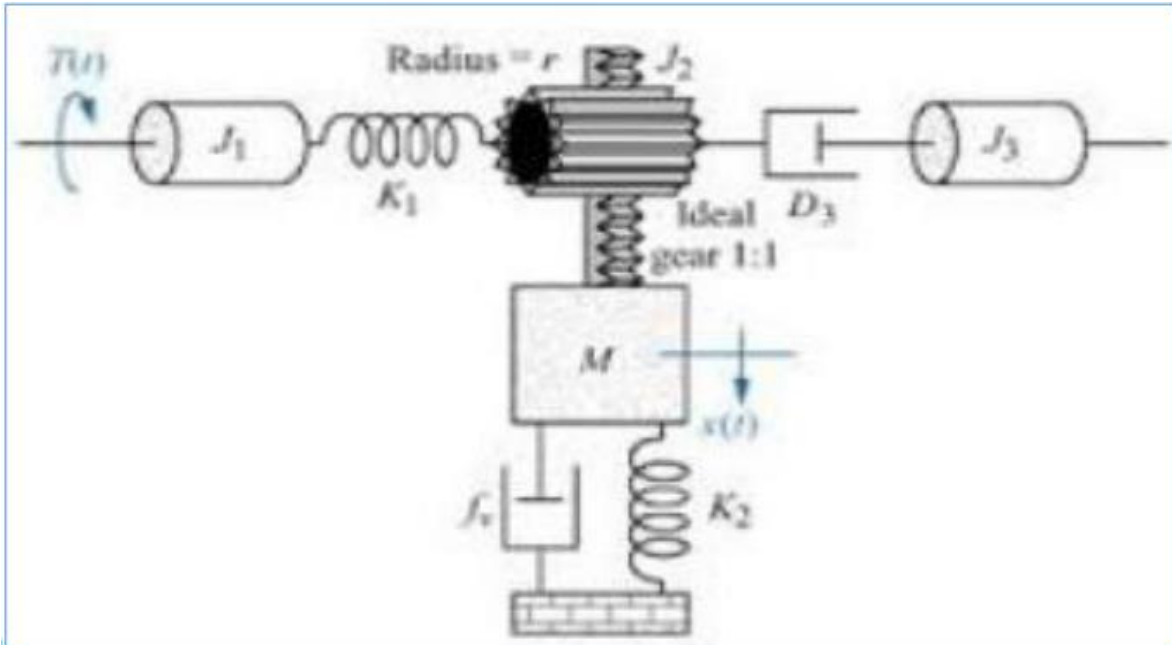
$$F_X - C(\dot{X}) = m\ddot{X} \quad \Rightarrow \quad F_X = m\ddot{X} + C(\dot{X})$$

ASI: $\frac{N_2}{N_1} T(t) - D\dot{\theta} - [m\ddot{X} + C(\dot{X})] (R) = J\ddot{\theta}$

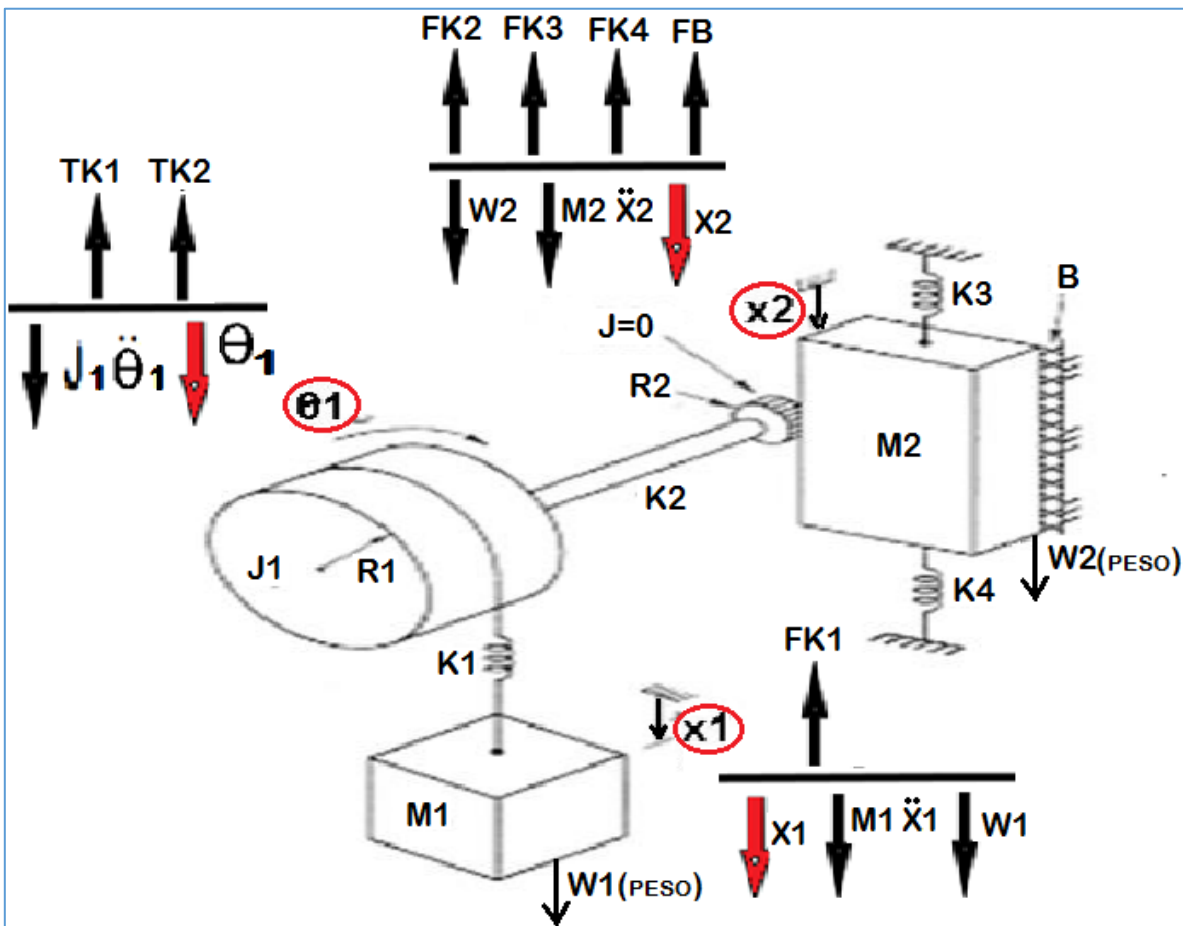
FINALMENTE: $\Rightarrow \quad X = R\theta \quad \dot{X} = R\dot{\theta} \quad \ddot{X} = R\ddot{\theta}$

Y ASI: $\frac{N_2}{N_1} T(t) - D \frac{\dot{X}}{R} - [m\ddot{X} + C(\dot{X})] (R) = J \frac{\ddot{X}}{R}$

En el siguiente ejercicio encuentre las ecuaciones para la dinámica en θ_1 , θ_2 , θ_3 , $X(t)$ y $T(t)$



En el siguiente ejercicio encuentre las 3 ecuaciones dinámicas que relacionan X_1 , θ_1 y X_2 .



x_1	$FK1 = K1 (X1 - X')$ $X' = R1 \theta_1$ $FK1 = K1 (X1 - R1 \theta_1)$	$W1 = M1(g)$
θ_1	$TK1 = R1 FK1$ $TK1 = R1 K1 (X1 - R1 \theta_1)$ $X' = R1 \theta_1$ $TK1 = R1 K1 (R1 \theta_1 - X1)$	$TK2 = K2 (\theta_1 - \theta')$ $\theta' = \frac{X2}{R2}$ $TK2 = K2 (\theta_1 - \frac{X2}{R2})$
x_2	$FK2 = \frac{TK2}{R2}$ $FK2 = \frac{K2 (\theta' - \theta_1)}{R2}$ $FK2 = \frac{K2 (\frac{X2}{R2} - \theta_1)}{R2}$	$W2 = M2(g)$

Finalmente las ecuaciones dinámicas en función de X_1 , θ_1 y X_2 quedarían de la siguiente manera:

(X_1)	$W1 - F_{K1} = m1 \ddot{X}1$ $m1(g) - K1(X1 - R1 \theta_1) = m1 \ddot{X}1$
(θ_1)	$-TK1 - TK2 = J1 \ddot{\theta}1$ $-R1 K1 (R1 \theta_1 - X1) - K2 \left(\theta_1 - \frac{X2}{R2} \right) = J1 \ddot{\theta}1$
(X_2)	$W2 - F_{K2} - F_{K3} - F_{K4} - F_B = m2 \ddot{X}2$ $m2(g) - \frac{K2 (\frac{X2}{R2} - \theta_1)}{R2} - K3(X2) - K4(X2) - B(X2) = m2 \ddot{X}2$

1.4. Sistemas nivel de líquidos en tanques de mezclas

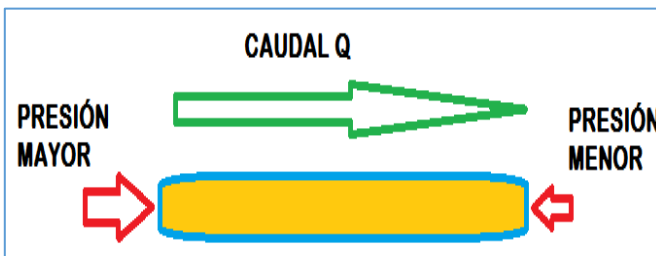
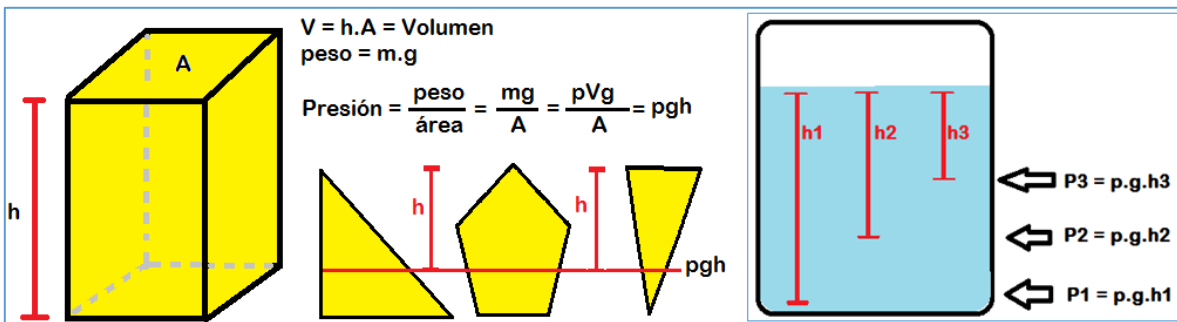
La presión ejercida en un fluido estático depende solamente de la profundidad del fluido, la densidad del fluido y la aceleración de la gravedad. La presión en un fluido estático, aparece por el peso del fluido, y es dada por la expresión:

$$\text{Presión} = \rho gh \quad \text{donde} \quad \rho = \frac{m}{V} = \text{densidad de fluido}$$

$$g = \text{aceleración de la gravedad}$$

$$h = \text{profundidad del fluido}$$

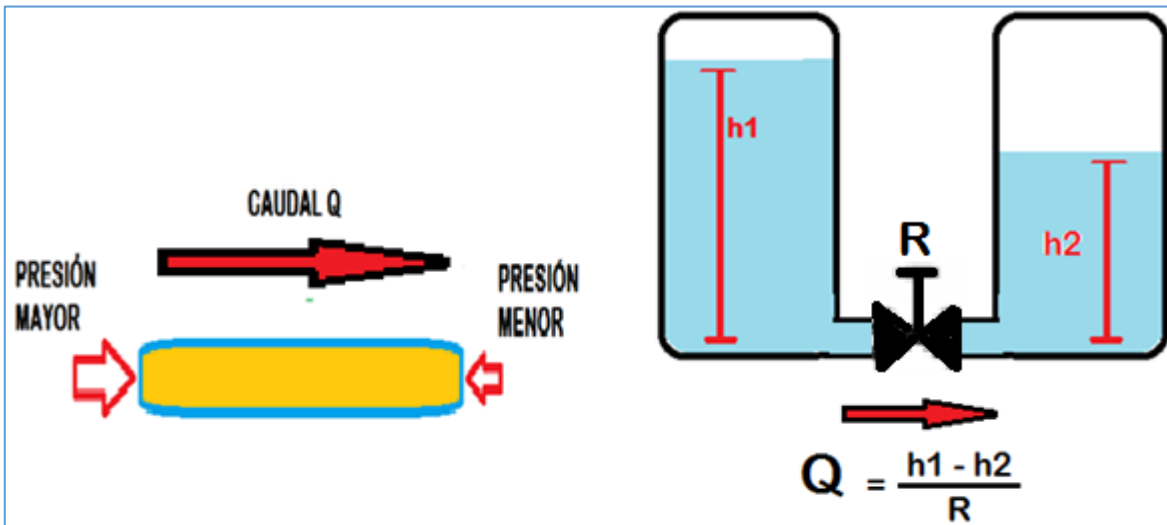
La presión ejercida por el peso de una columna de líquido de área A y altura h no depende de la forma de la masa o el área de la superficie que contiene el líquido. La presión dependerá únicamente de la altura h para un mismo fluido.



Por otra parte, cuando se presenta una diferencia de presión se genera un desplazamiento de fluido lo que se conoce como caudal. Este caudal depende a su vez de la fricción que el líquido tiene con la tubería, razón por la cual aparece el concepto de resistencia hidráulica, que de forma análoga a los circuitos eléctricos es una oposición al paso del fluido. Este concepto simplifica y facilita los cálculos de redes hidráulicas en tuberías. Esta resistencia aparece como constante y depende del líquido que se moviliza así como de los factores propios de los materiales de los canales de transporte.

De esta forma podemos realizar un modelamiento matemático de la variación de volumen en tanques interconectados por tuberías, teniendo en cuenta que la presión atmosférica se transforma en la presión de referencia ($P=0$) y que existe la resistencia hidráulica que en su

definición incluye las propiedades del fluido que se está movilizandoo. Adicionalmente la presión depende una y exclusivamente de la altura.

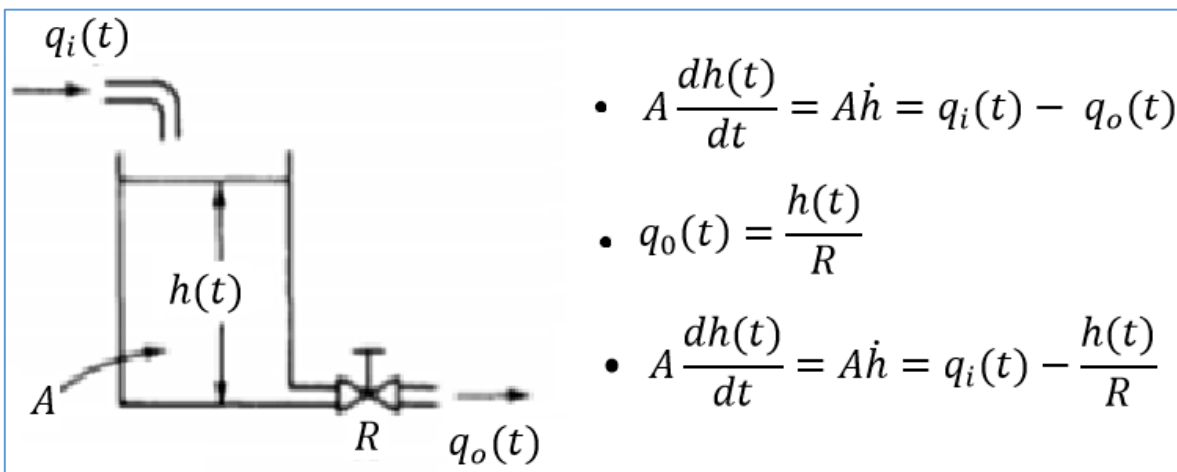


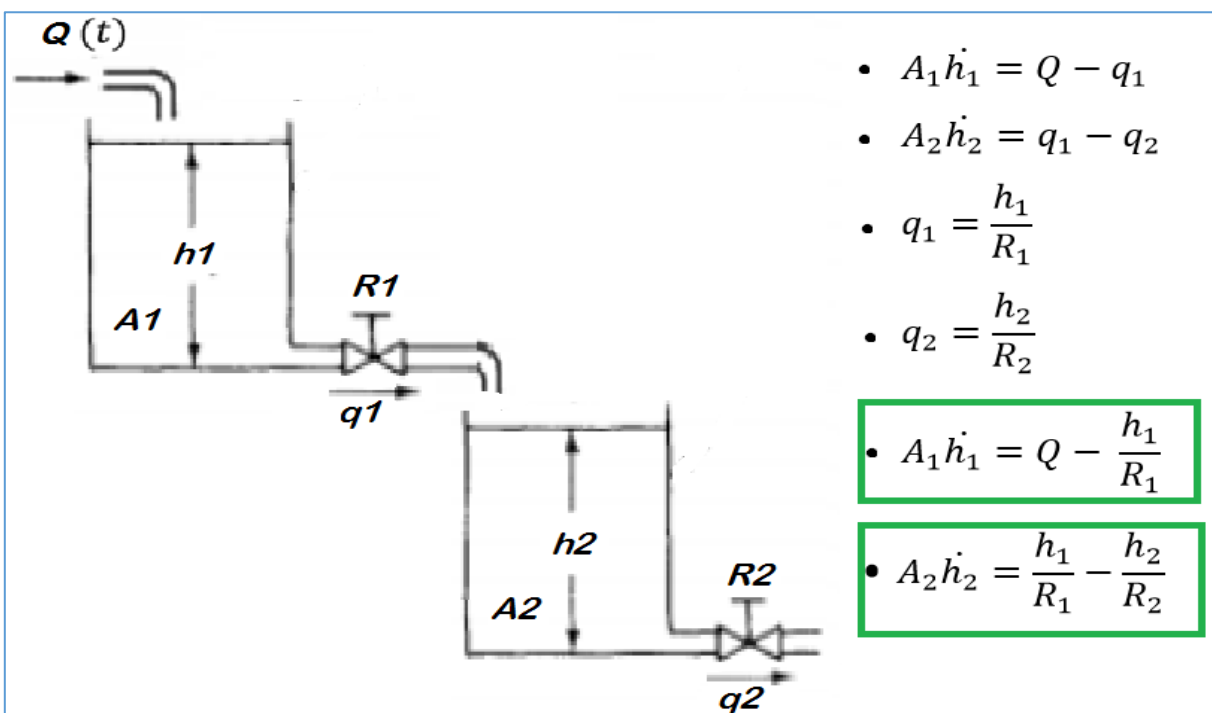
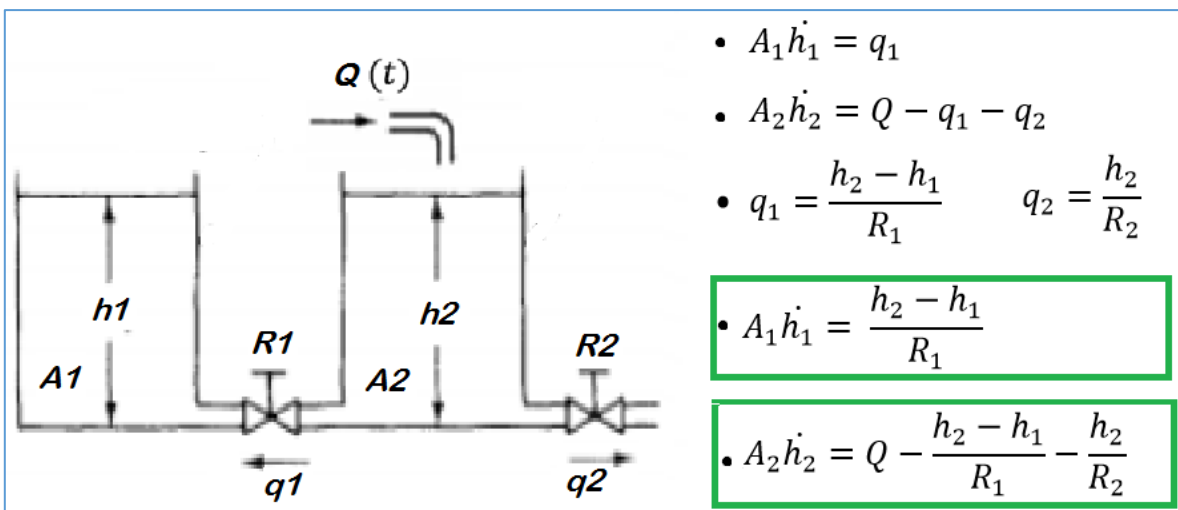
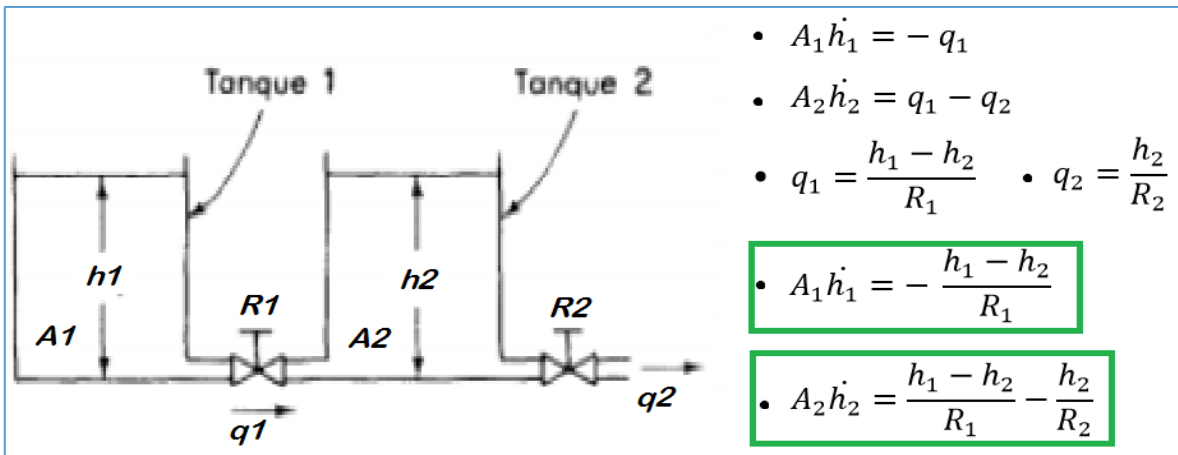
De esta manera aplicamos la siguiente condición dinámica para encontrar un modelamiento matemático. Donde la variación de volumen en un tanque es igual a la sumatoria de caudales que entran, menos los caudales que salen.

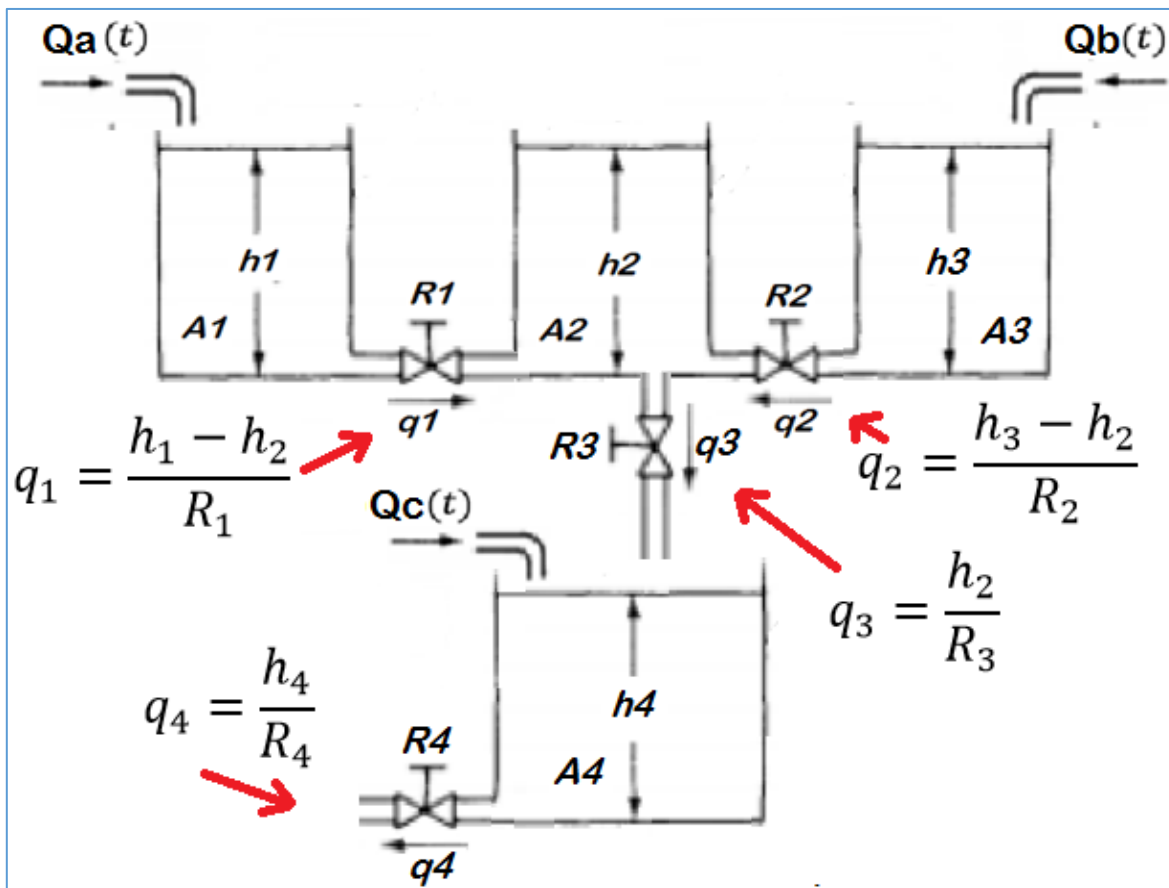
El volumen $V = A \cdot h$ dado que el área A es constante entonces

$$\frac{dV}{dt} = A \cdot \frac{dh}{dt} \quad A \cdot \frac{dh}{dt} = \sum Q \text{ entra} - \sum Q \text{ sale}$$

1.4.1. Ejemplos







$$A_1 \dot{h}_1 = Q_a - q_1 \Rightarrow A_1 \dot{h}_1 = Q_a - \left(\frac{h_1 - h_2}{R_1} \right)$$

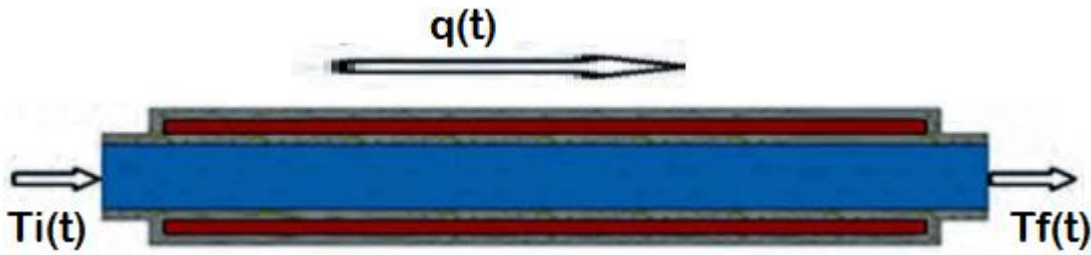
$$A_2 \dot{h}_2 = q_1 + q_2 - q_3 \Rightarrow A_2 \dot{h}_2 = \frac{h_1 - h_2}{R_1} + \frac{h_3 - h_2}{R_2} - \frac{h_2}{R_3}$$

$$A_3 \dot{h}_3 = Q_b + q_2 \Rightarrow A_3 \dot{h}_3 = Q_b + \frac{h_3 - h_2}{R_2}$$

$$A_4 \dot{h}_4 = Q_c + q_3 - q_4 \Rightarrow A_4 \dot{h}_4 = Q_c + \frac{h_2}{R_3} - \frac{h_4}{R_4}$$

1.5. Sistemas térmicos

La pérdida de calor (C) en un tramo puede expresarse como:



$$C = C_v * q(t) * [T_i(t) - T_f(t)]$$

Donde:

C = pérdida de calor

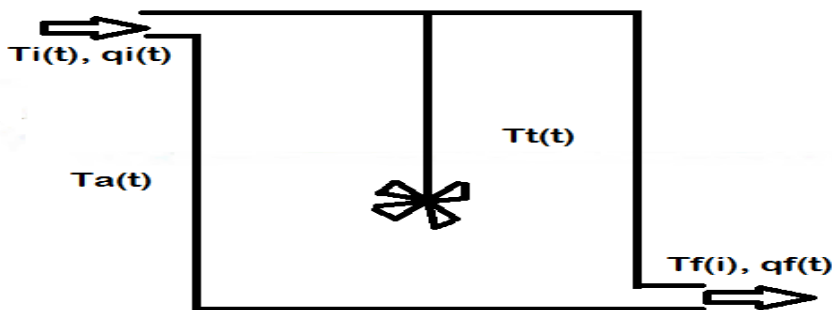
C_v = calor específico volumétrico

$q(t)$ = Caudal

$T_i(t)$ = temperatura de entrada

$T_f(t)$ = temperatura de salida

En un tanque de volumen (V) al que se aplica un flujo volumétrico (q_i) con una temperatura de entrada (T_i) y tiene un flujo de salida (q_f) con una temperatura de salida (T_f), podemos hacer un balance de energías de la siguiente manera.



Dado que la suma de energías que entran a un sistema es igual a la suma de energías que salen.

La energía producida por el flujo de entrada esta dada por la ecuación:

$$h \cdot T_i(t) \cdot q_i(t)$$

Donde h es el calor específico volumétrico que es igual al calor específico por densidad del material.

$$h \cdot T_i(t) \cdot q_i(t) = C_p \cdot \rho \cdot T_i(t) \cdot q_i(t)$$

En el tanque de la figura podemos decir que la energía que entra producida por el flujo q_i es igual a la suma de energía que sale del fluido q_f , más la energía que sale por ley de enfriamiento de Newton, más la energía que sale como pérdida de energía dentro del tanque.

$$C_p \cdot \rho \cdot T_i(t) \cdot q_i(t) = C_p \cdot \rho \cdot T_f(t) \cdot q_f(t) + U_0 \cdot A \cdot [T_t(t) - T_a(t)] + C_v \cdot \rho \cdot V \cdot \frac{dT_t(t)}{dt}$$

Donde:

T_i = temperatura del fluido a la entrada

T_f = temperatura del fluido a la salida

T_t = temperatura del fluido en el tanque

T_a = temperatura ambiente

C_p = calor específico del fluido

C_v = calor específico del fluido en el tanque

P = densidad del fluido

U_0 = coeficiente global de Newton para ley de enfriamiento

A = área

V = volumen

Si asumimos que la temperatura en el tanque es igual a la temperatura a la salida, es decir que si $T_t(t) = T_f(t)$ entonces:

$$C_p \cdot \rho \cdot T_i(t) \cdot q_i(t) = C_p \cdot \rho \cdot T_f(t) \cdot q_f(t) + U_0 \cdot A \cdot [T_f(t) - T_a(t)] + C_v \cdot \rho \cdot V \cdot \frac{dT_f(t)}{dt}$$

Ahora asumimos que el aislamiento del tanque es tal que no existen pérdidas por temperatura ambiente y así:

$$C_p \cdot \rho \cdot T_i(t) \cdot q_i(t) = C_p \cdot \rho \cdot T_f(t) \cdot q_f(t) + C_v \cdot \rho \cdot V \cdot \frac{dT_f(t)}{dt}$$

Si el caudal de entrada es igual al caudal de salida y adicionalmente es constante entonces podemos denominar la constante K_1 como:

$$C_p \cdot \rho \cdot q_i(t) = C_p \cdot \rho \cdot q_f(t) = K_1 \text{ (constante)}$$

Y por su parte si el volumen en el tanque es constante denominamos K_2

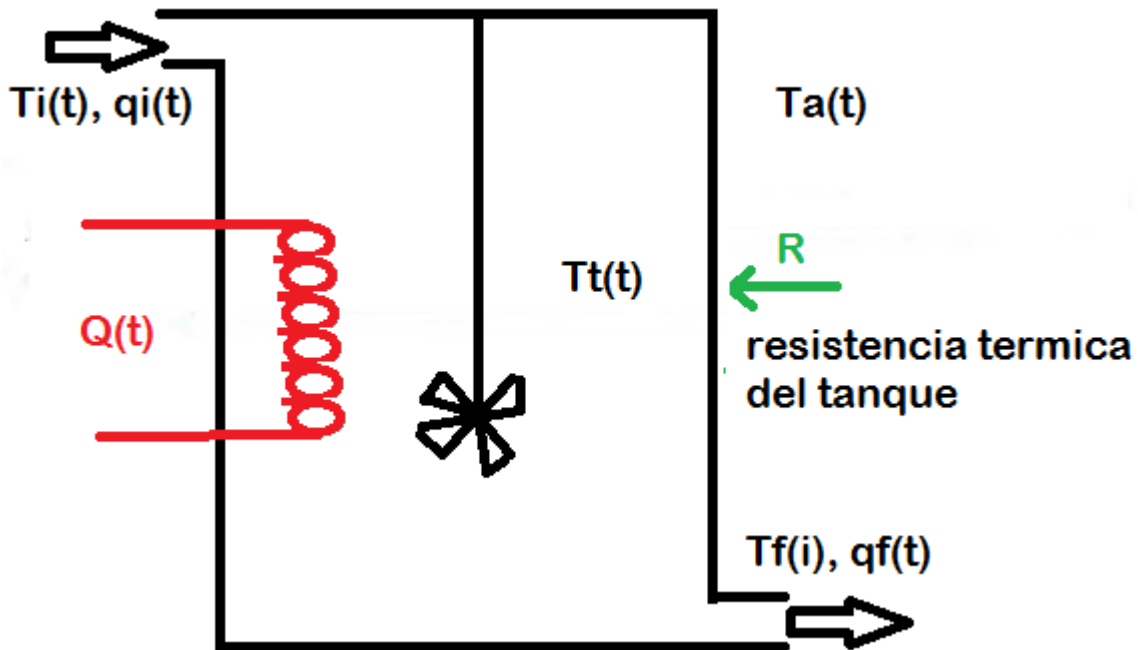
$$C_v \cdot \rho \cdot V = K_2 \text{ (constante)}$$

Obtenemos la siguiente ecuación dinámica del comportamiento de las temperaturas en el tanque.

$$K1.T_i(t) = K1.T_f(t) + K2.\frac{dT_f(t)}{dt}$$

$$K2.\frac{dT_f(t)}{dt} = K1.T_i(t) - K1.T_f(t) = K1.[T_i(t) - T_f(t)]$$

Modelo dinámico de un tanque con calentamiento



Basado en el modelo de energías planteado, para el tanque de calentamiento podemos decir que:

El cambio de calor dentro del recipiente es:

$$C_v \cdot \rho \cdot V \cdot \frac{dT_t(t)}{dt}$$

La pérdida de calor en el proceso está dada por energía de entrada menos la energía de salida:

$$C_p \cdot \rho \cdot T_i(t) \cdot q_i(t) - C_p \cdot \rho \cdot T_f(t) \cdot q_f(t)$$

Las pérdidas de energía con el medio ambiente podemos expresarla también en términos de la resistencia térmica (R) del tanque como:

$$U_0 \cdot A \cdot [T_f(t) - T_a(t)] = \frac{[T_f(t) - T_a(t)]}{R}$$

De esta manera podemos proponer una ecuación que represente el cambio de calor dentro del recipiente como las perdidas de calor en el proceso, mas el calor que entra Q(t) menos las perdidas con el medio ambiente obteniendo la siguiente ecuación:

$$C_v \cdot \rho \cdot V \cdot \frac{dT_t(t)}{dt} = C_p \cdot \rho \cdot T_i(t) \cdot q_i(t) - C_p \cdot \rho \cdot T_f(t) \cdot q_f(t) + Q(t) - \frac{[T_f(t) - T_a(t)]}{R}$$

Si asumimos que $R \rightarrow \infty$ entonces las perdidas por el ambiente serian igual a 0

$$C_v \cdot \rho \cdot V \cdot \frac{dT_t(t)}{dt} = C_p \cdot \rho \cdot T_i(t) \cdot q_i(t) - C_p \cdot \rho \cdot T_f(t) \cdot q_f(t) + Q(t)$$

Si el caudal de entrada es igual al caudal de salida $q_i(t) = q_f(t)$

$$C_v \cdot \rho \cdot V \cdot \frac{dT_t(t)}{dt} = C_p \cdot \rho \cdot q_i(t) [T_i(t) - T_f(t)] + Q(t)$$

Sea el volumen (V) constante y $q_i(t)$ constante asumimos las constantes K1 y K2 como:

$$C_p \cdot \rho \cdot q_i(t) = C_p \cdot \rho \cdot q_f(t) = K1 \text{ (constante)}$$

$$C_v \cdot \rho \cdot V = K2 \text{ (constante)}$$

Finalmente asumimos que la temperatura de salida es la misma que la temperatura en el tanque

$$T_t(t) = T_f(t)$$

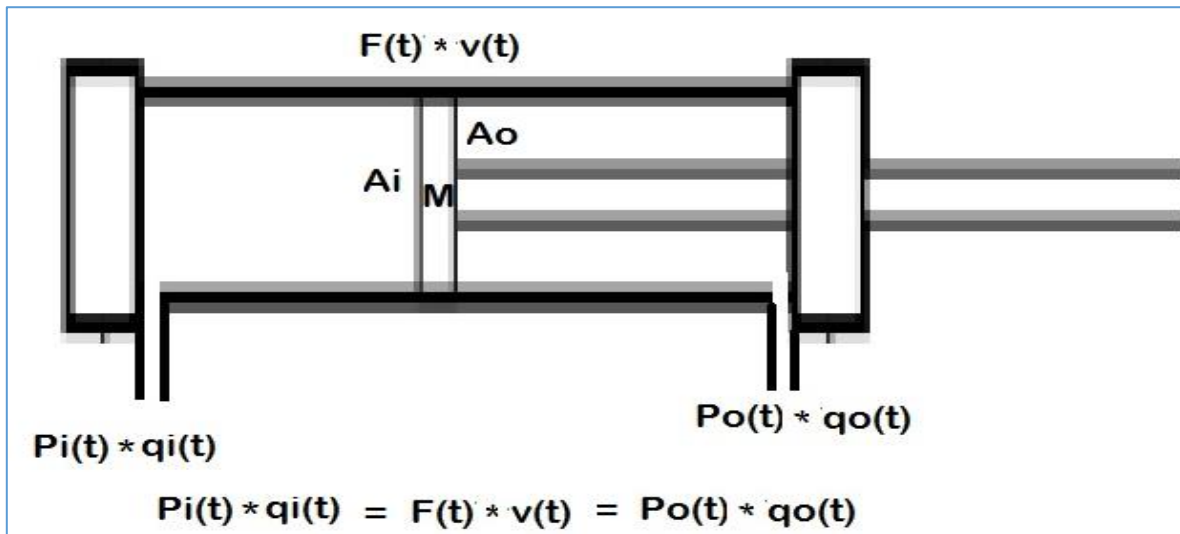
Entonces:

$$C_v \cdot \rho \cdot V \cdot \frac{dT_f(t)}{dt} = C_p \cdot \rho \cdot q_i(t) [T_i(t) - T_f(t)] + Q(t)$$

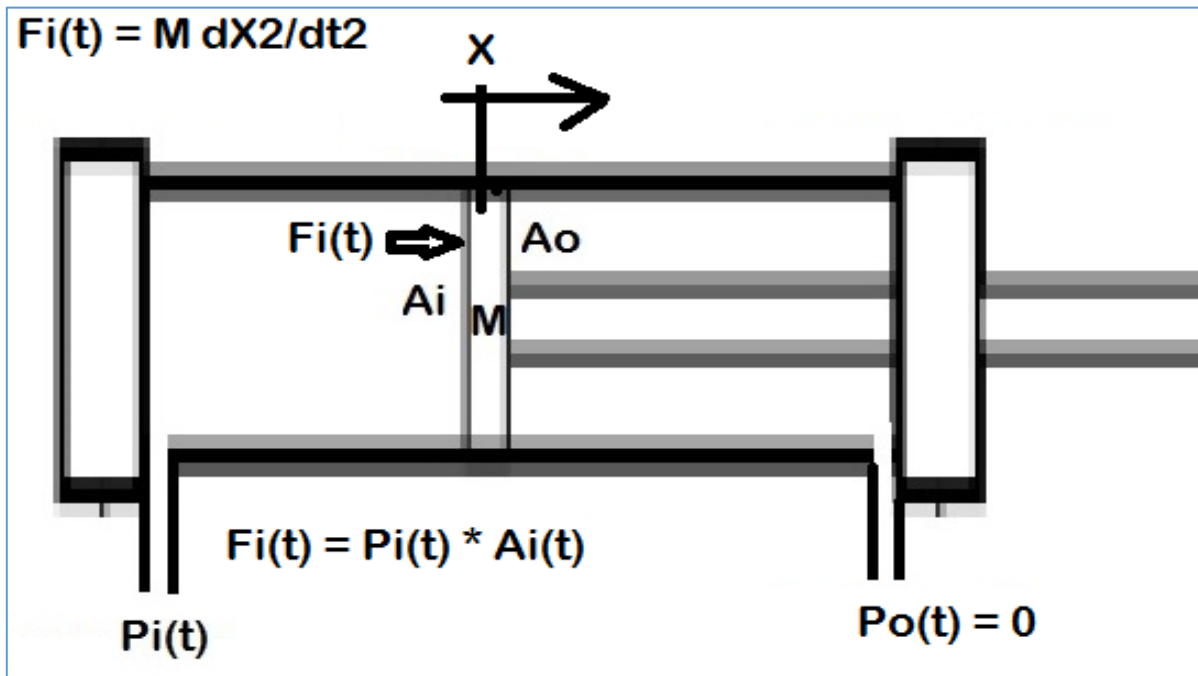
$$K2 \cdot \frac{dT_f(t)}{dt} = K1 \cdot [T_i(t) - T_f(t)] + Q(t)$$

1.6. Sistemas hidráulicos o neumáticos

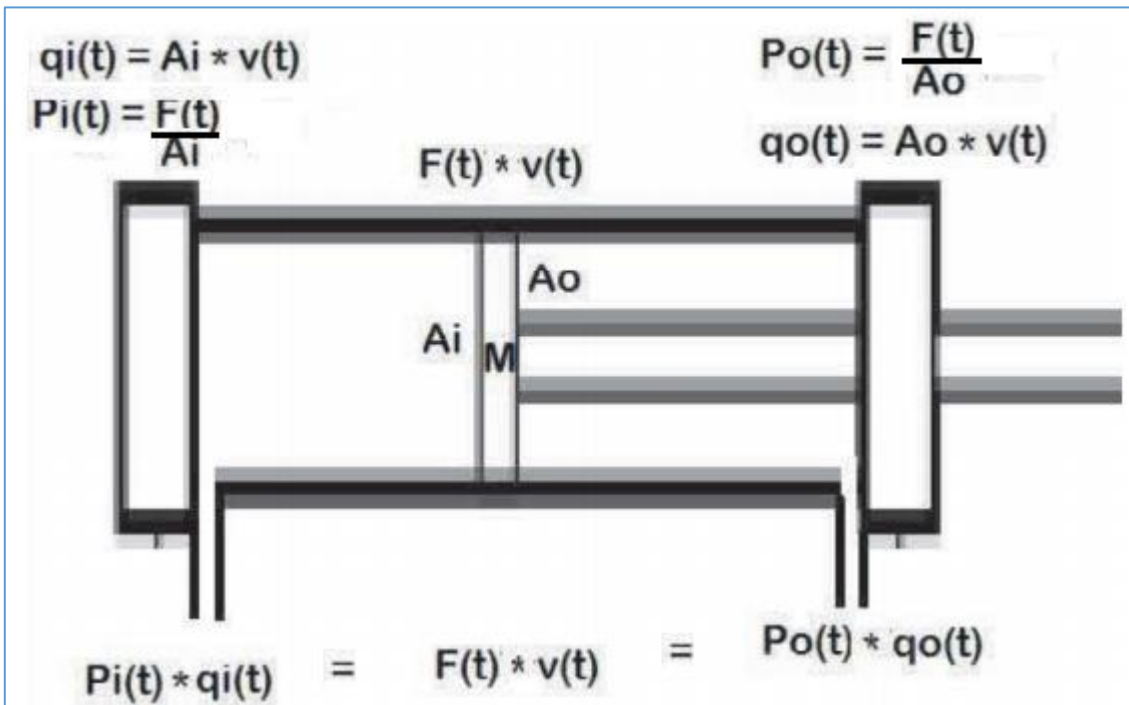
En el caso de la hidráulica o la neumática de actuadores encontramos una relación directa entre fuerzas y presiones que nos permiten encontrar relación entre variables, basados en la conservación de la energía o potencia:



Dadas las premisas del sistema podemos encontrar relación entre variables



Relacionado potencias...



$$P_i(t) = \frac{F(t)}{A_i} \quad P_o(t) = \frac{F(t)}{A_o}$$

$$P_i(t) * A_i = F(t) = P_o(t) * A_o$$

Relacion de Presiones

$$\frac{P_o(t)}{P_i(t)} = \frac{A_i}{A_o}$$

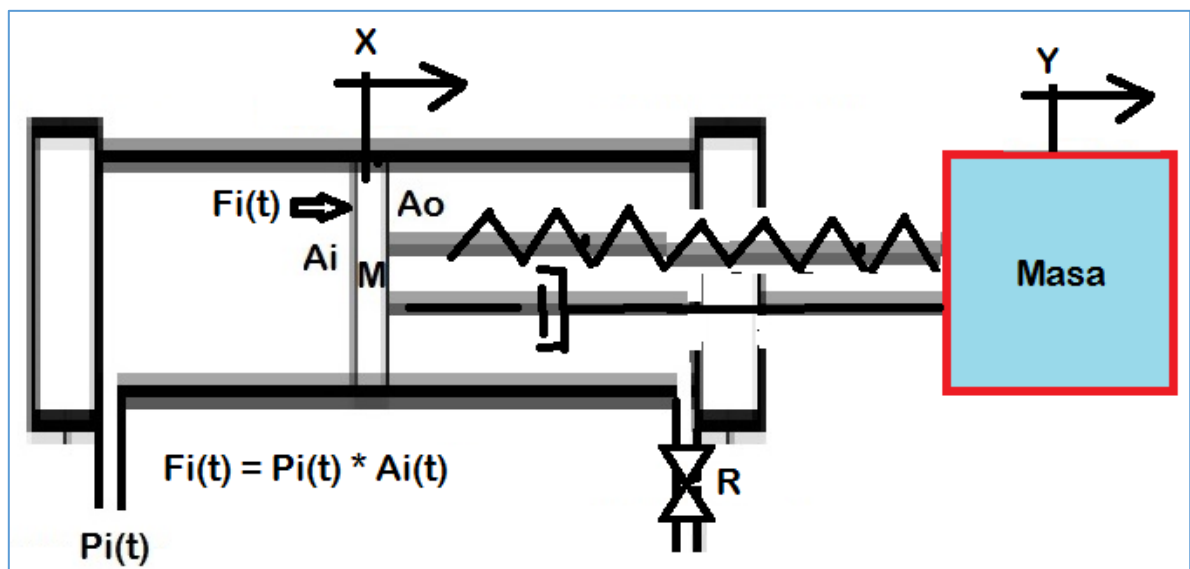
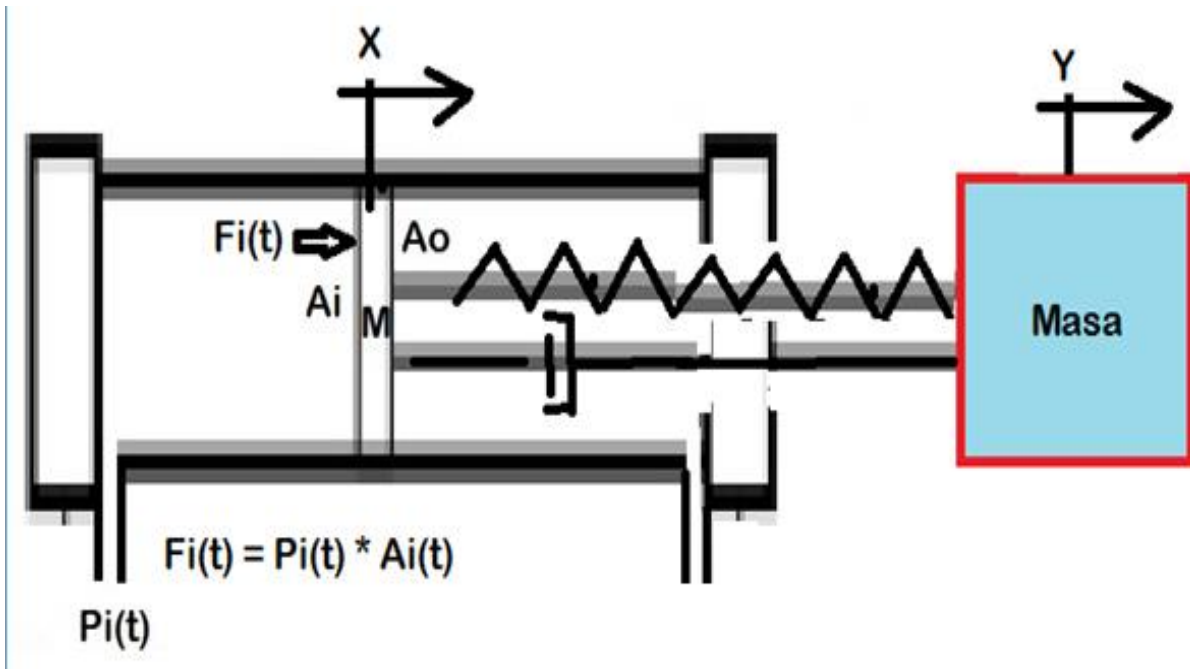
$$q_i(t) = A_i * v(t) \quad q_o(t) = A_o * v(t)$$

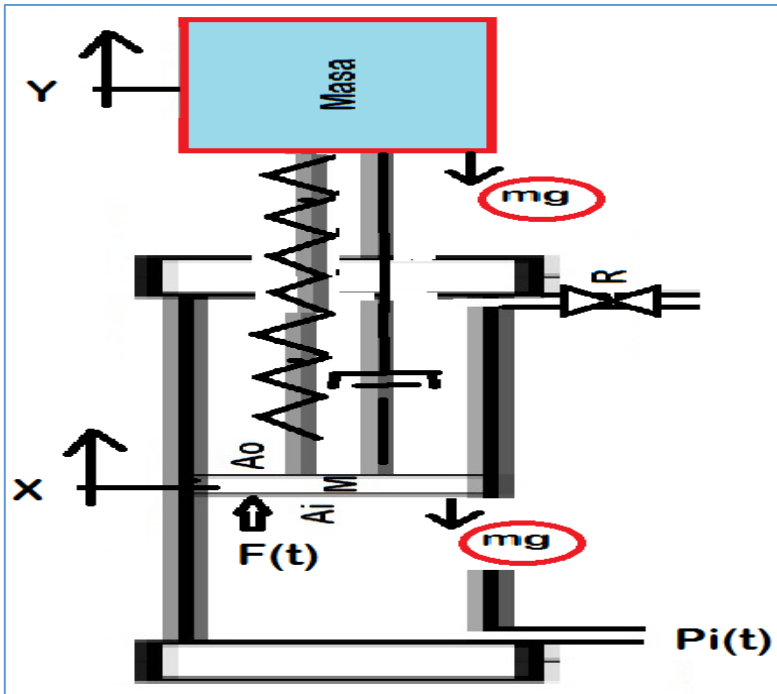
$$\frac{q_i(t)}{A_i} = v(t) \quad \frac{q_o(t)}{A_o} = v(t)$$

Relacion de velocidades

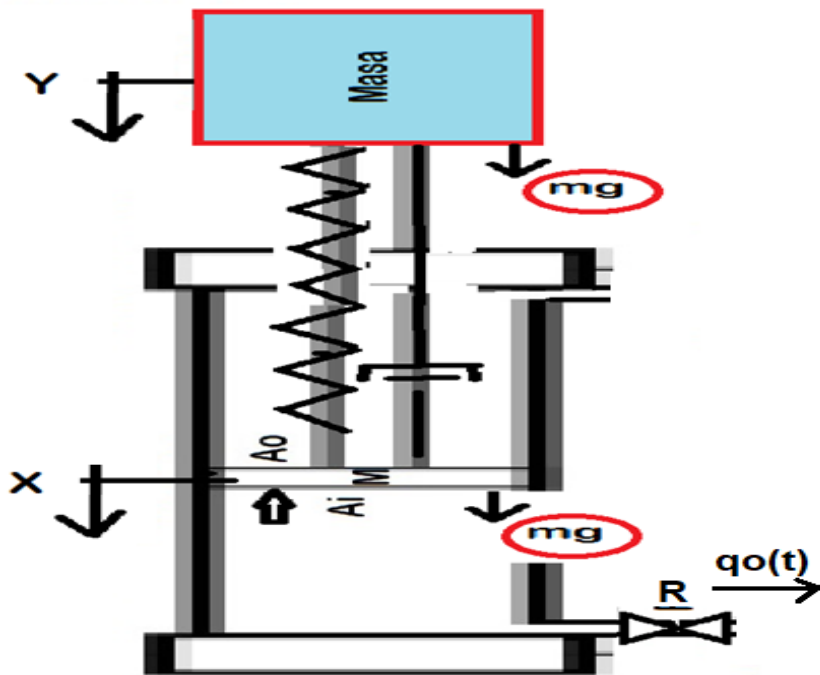
$$\frac{q_i(t)}{q_o(t)} = \frac{A_i}{A_o} = \frac{P_o(t)}{P_i(t)}$$

1.6.1. Ejemplos



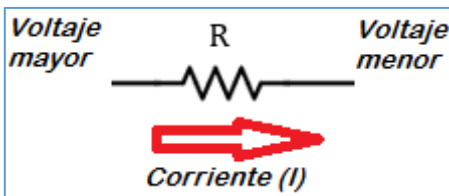


Fuerzas constantes que aparecen dadas por el peso de las masas y su relación con la gravedad. $W = m \cdot g$

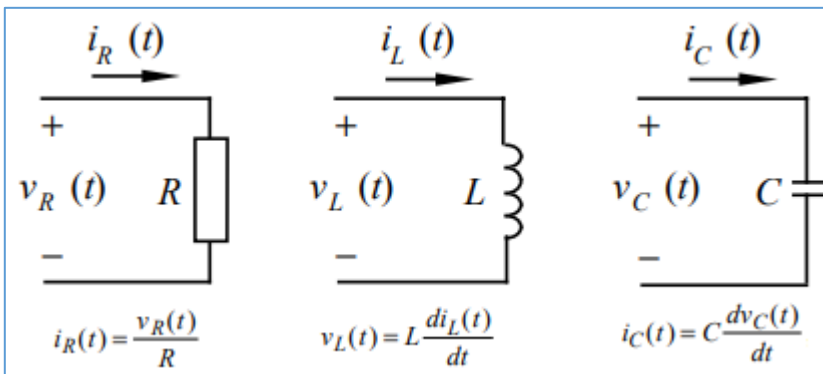


1.7. Sistemas eléctricos

Ley de ohm



Componentes eléctricos básicos



Para desarrollar el modelamiento matemático de este tipo de sistemas aplicaremos las leyes de circuitos de Kirchhoff. En donde:

La sumatoria de voltajes en una malla cerrada es igual a 0

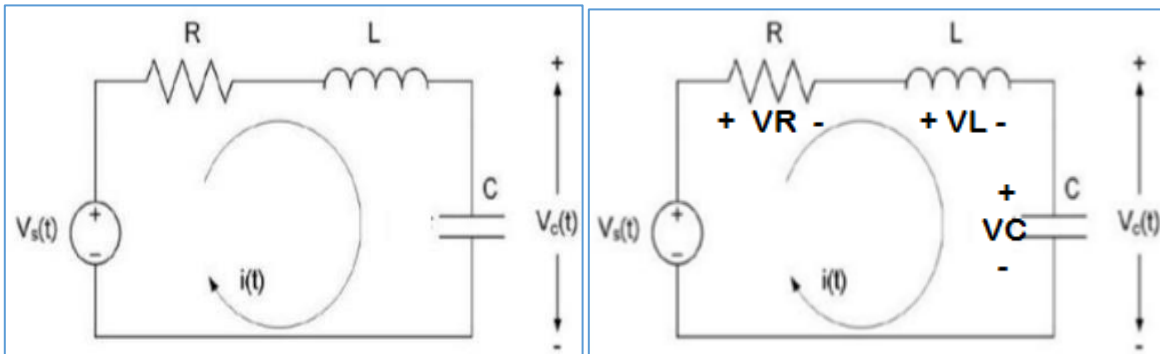
$$\sum \text{Voltajes} = 0$$

Y en un nodo, la suma de corrientes que entran es igual a la suma de corrientes que salen.

$$\sum I \text{ entran} = \sum I \text{ salen}$$

Utilizando elementos pasivos como fuentes de voltaje o corriente y resistencias, en conjunto con elementos que almacenan energía como son el condensador y la bobina, encontramos modelos matemáticos que se asemejan a sistemas mecánicos, térmicos, etc, en cuanto a su tipo de respuesta.

1.7.1. Ejemplos



En la malla cerrada decimos que la suma de voltajes es igual a 0

$$-V_s(t) + R \cdot i(t) + L \cdot \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{C} \cdot \int i(t) dt = 0$$

Derivando a lado y lado de la ecuación

$$-\frac{dV_s(t)}{dt} + R \cdot \frac{di(t)}{dt} + L \cdot \frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{1}{C} \cdot i(t) = 0$$

$$R \cdot \frac{di(t)}{dt} + L \cdot \frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{1}{C} \cdot i(t) = \frac{dV_s(t)}{dt}$$

Si se busca una relación entre la entrada $V_s(t)$ y el comportamiento del voltaje $V_c(t)$ (voltaje en el condensador) tenemos que:

Voltaje en el condensador esta dado por:

$$\frac{1}{C} \cdot \int i(t) dt = V_c(t)$$

Si derivamos en ambos lados de la ecuación con respecto al tiempo podemos encontrar las siguientes igualdades:

$$\frac{1}{C} \cdot i(t) = \frac{dV_c(t)}{dt}$$

$$i(t) = C \cdot \frac{dV_c(t)}{dt}$$

Derivando nuevamente la igualdad encontramos que:

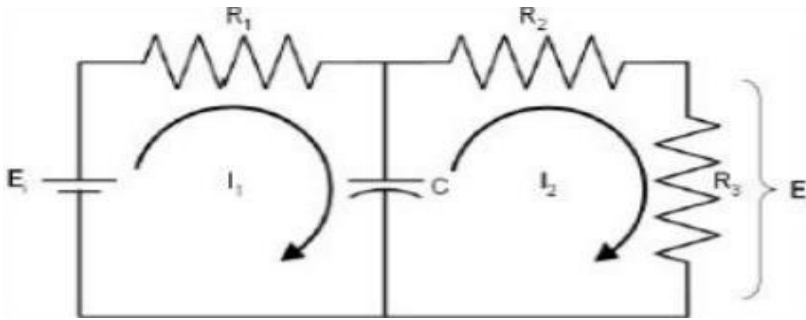
$$\frac{di(t)}{dt} = C \cdot \frac{d^2V_c(t)}{dt^2}$$

$$\frac{d^2i(t)}{dt^2} = C \cdot \frac{d^3V_c(t)}{dt^3}$$

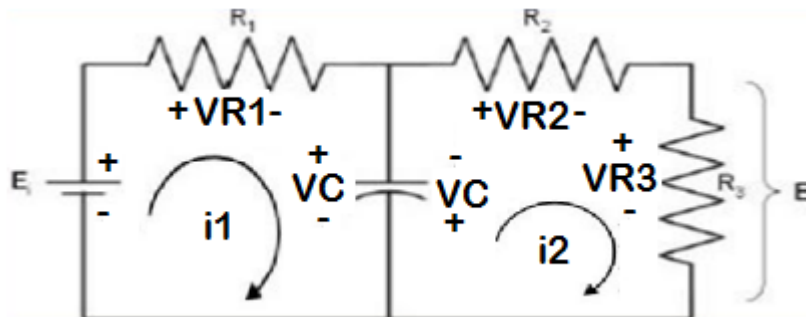
Así reemplazando $i(t)$ en términos de $V_c(t)$ obtenemos que:

$$R \cdot C \cdot \frac{d^2 V_c(t)}{dt^2} + L \cdot C \cdot \frac{d^3 V_c(t)}{dt^3} + \frac{1}{C} \cdot C \cdot \frac{d V_c(t)}{dt} = \frac{d V_s(t)}{dt}$$

$$R \cdot C \cdot \frac{d V_c(t)}{dt} + L \cdot C \cdot \frac{d^2 V_c(t)}{dt^2} + V_c(t) = V_s(t)$$



Para este ejemplo tenemos 2 mallas en donde la sumatoria de voltajes debe ser igual a 0.

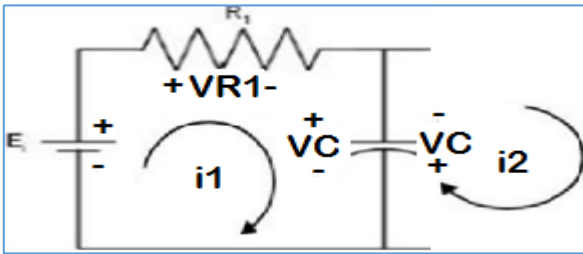


Al hacer este análisis encontramos que el condensador C es influenciado analíticamente por 2 corrientes I_1 , I_2 . Al finalizar el análisis la corriente del condensador será $I_1 - I_2$ o en su defecto $I_2 - I_1$: esto dependerá del signo resultante, pero la magnitud será el valor absoluto de la diferencia ($|I_1 - I_2|$).

De igual manera, el diagrama de voltajes tiene una polaridad, esta polaridad la establecemos en el sentido de la corriente diciendo que por el elemento que pasa polariza positivo (+) por donde entra y negativo (-) por donde sale. La polaridad de las fuentes de voltaje se mantiene tal como se establece en un principio y no depende de la dirección de las corrientes.

Debemos encontrar, tantas ecuaciones de malla, como corrientes hemos planteado en el circuito.

Malla I1:



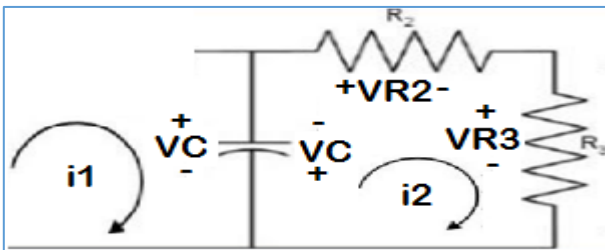
La sumatoria de voltajes debe tener en cuenta que los elementos que en sus análisis se afectan por 2 corrientes deben aparecer reflejados en la malla por su afectación externa

$$-Ei(t) + VR1 + VC = 0$$

$$-Ei(t) + R1 \cdot i1(t) + \frac{1}{C} \cdot \int i1(t) dt - \frac{1}{C} \cdot \int i2(t) dt = 0$$

$$-Ei(t) + R1 \cdot i1(t) + \frac{1}{C} \cdot \int [i1(t) - i2(t)] dt = 0$$

Malla I2:

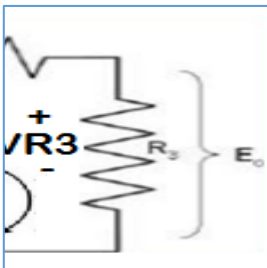


$$VR2 + VR3 + VC = 0$$

$$R2 \cdot i2(t) + R3 \cdot i2(t) + \frac{1}{C} \cdot \int i2(t) dt - \frac{1}{C} \cdot \int i1(t) dt = 0$$

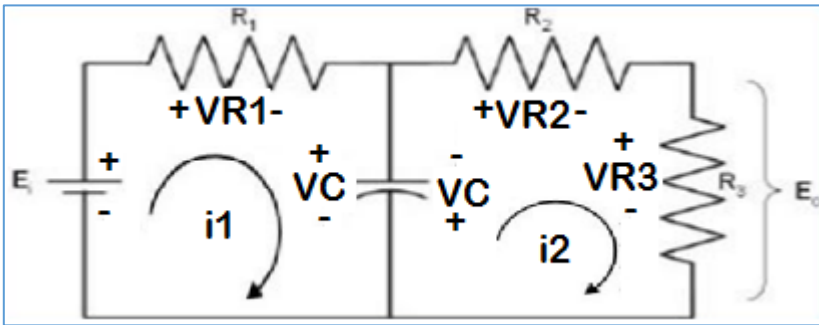
$$R2 \cdot i2(t) + R3 \cdot i2(t) + \frac{1}{C} \cdot \int [i2(t) - i1(t)] dt = 0$$

Finalmente, para encontrar todas las ecuaciones referentes a este ejercicio, se establece la salida o elemento de análisis el voltaje de salida E_o el voltaje que cae en la resistencia 3



$$E_o(t) = R3 \cdot i2(t)$$

De esta manera las ecuaciones que describen el modelo son:



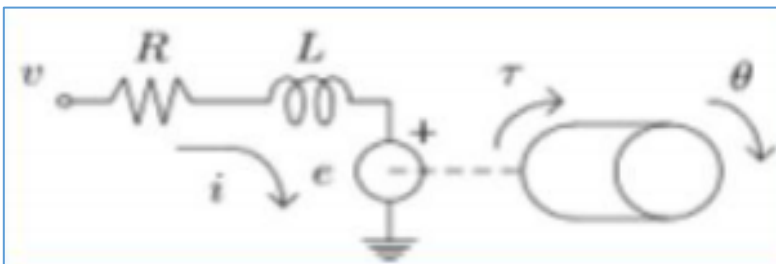
$$-E_1 i(t) + R_1 i_1(t) + \frac{1}{C} \cdot \int [i_1(t) - i_2(t)] dt = 0$$

$$R_2 i_2(t) + R_3 i_2(t) + \frac{1}{C} \cdot \int [i_2(t) - i_1(t)] dt = 0$$

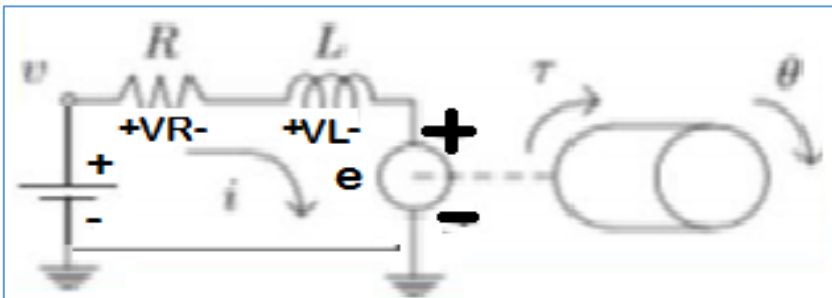
$$E_o(t) = R_3 i_2(t)$$

1.8. Sistemas electromecánicos

Podemos hacer un modelo matemático de un motor.



Sea un motor eléctrico un gran bobinado que funciona con efectos electromagnéticos, el esquema del motor muestra que al aplicar un voltaje, la energía eléctrica se convierte en energía mecánica, pero tiene en cuenta las pérdidas de energía eléctrica que se dan en el bobinado. Resistivo porque todo cable tiene una resistencia dada por la longitud (l), la resistividad (ρ) y el área transversal (A) $\rightarrow R = \frac{\rho \cdot l}{A}$; E inductivo, la inductancia L del bobinado propiamente del motor.



La malla para la corriente i será:

$$-V(t) + V_R + V_L + e(t) = 0$$
$$-V(t) + R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + e(t) = 0$$

Donde la fuerza electromotriz $e(t)$ representa la energía aprovechada para generar el movimiento.

La potencia eléctrica está dada por una relación directa entre el voltaje y la corriente,

$$P_e = V \cdot I$$

Aunque en los motores existen variaciones según el tipo de motor que se utilice, pero en general establecemos que esta potencia eléctrica se transforma en potencia mecánica que se da por la relación directa de Torque por la velocidad angular.

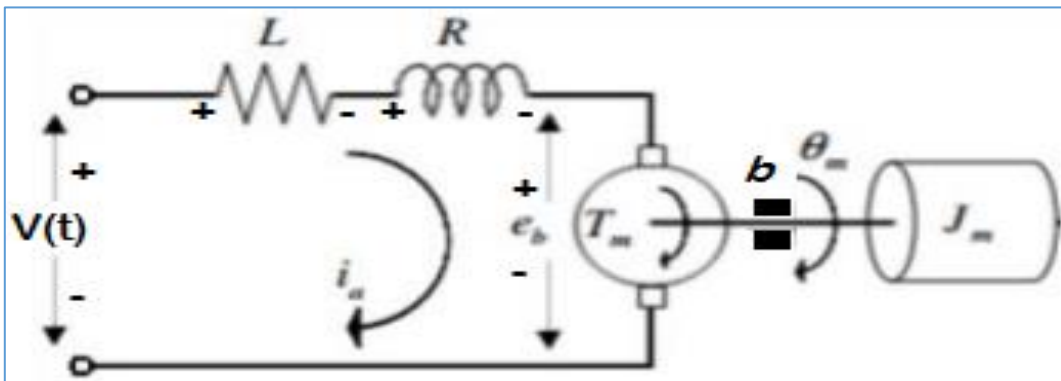
Establecemos una relación directamente proporcional entre las variables eléctricas y las variables mecánicas.

La variación de voltaje en el motor genera una variación de velocidad en el eje por lo que podemos establecer que $e(t) = k_e \cdot \omega(t)$ donde $\omega(t)$ (velocidad angular), $e(t)$ la fuerza electromotriz y k_e una constante de proporcionalidad.

Por su parte, la variación de corriente genera una variación en el torque del eje motor y podemos establecer que $T(t) = k_m \cdot i(t)$ donde $T(t)$ refiere el torque del motor, $i(t)$ la corriente aplicada y k_m una constante de proporcionalidad.

De esta manera podemos crear un modelamiento matemático para el motor y a si mismo para el generador.

1.8.1. Modelo del Motor



Para la parte eléctrica:

$$-V(t) + VL + VR + Eb(t) = 0$$

$$-V(t) + L \frac{di(t)}{dt} + R \cdot i(t) + Eb(t) = 0$$

Para la parte mecánica:

$$Tm(t) - Tb = Jm \cdot \frac{d^2\theta m(t)}{dt^2}$$

$$Tm(t) - b \frac{d\theta m(t)}{dt} = Jm \cdot \frac{d^2\theta m(t)}{dt^2}$$

Relacionando los 2 sistemas tenemos:

$$Tm(t) = km \cdot i(t)$$

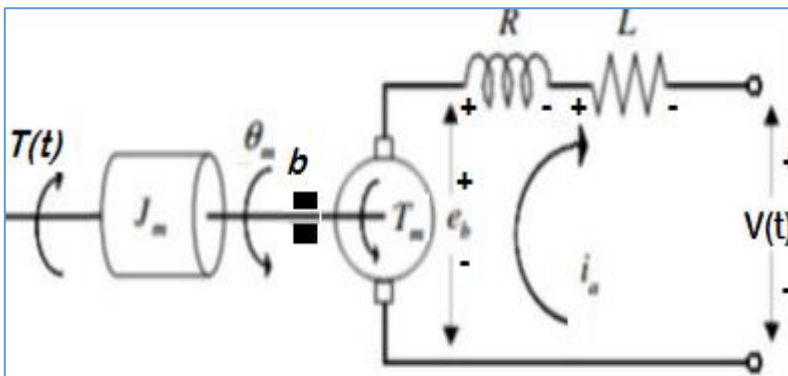
$$Eb(t) = ke \cdot \frac{d\theta m(t)}{dt}$$

Y allí mis 2 ecuaciones teniendo como variables $i(t)$ y $\theta(t)$ son:

$$-V(t) + L \frac{di(t)}{dt} + R \cdot i(t) + ke \cdot \frac{d\theta m(t)}{dt} = 0$$

$$km \cdot i(t) - b \frac{d\theta m(t)}{dt} = Jm \cdot \frac{d^2\theta m(t)}{dt^2}$$

1.8.2. Modelo del Generador



Para la parte mecánica:

$$T(t) - Tb - Tm = Jm \cdot \frac{d^2\theta m(t)}{dt^2}$$

$$T(t) - b \frac{d\theta m(t)}{dt} - Tm = Jm \cdot \frac{d^2\theta m(t)}{dt^2}$$

Para la parte eléctrica:

$$-Eb(t) + VR + VL + V(t) = 0$$

$$-Eb(t) + R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + V(t) = 0$$

$$V(t) = Eb(t) - R \cdot i(t) - L \frac{di(t)}{dt}$$

Relacionando los 2 sistemas tenemos:

$$Eb(t) = ke \cdot \frac{d\theta m(t)}{dt}$$

$$Tm(t) = km \cdot i(t)$$

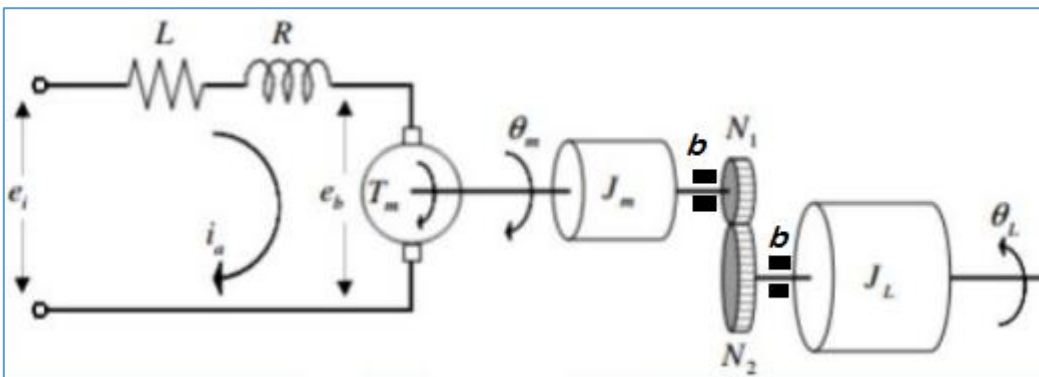
Y allí mis 2 ecuaciones teniendo como variables $i(t)$ y $\theta(t)$ son:

$$T(t) - b \frac{d\theta m(t)}{dt} - km \cdot i(t) = Jm \cdot \frac{d^2\theta m(t)}{dt^2}$$

$$V(t) = ke \cdot \frac{d\theta m(t)}{dt} - R \cdot i(t) - L \frac{di(t)}{dt}$$

1.8.3. Motor con engranajes

Podemos agregar a nuestros modelos de motor y generador un sistema de engranajes y tendríamos los siguientes modelos.



$$Eb(t) = ke \cdot \frac{d\theta m(t)}{dt}$$

$$-Ei(t) + L \frac{di(t)}{dt} + R \cdot i(t) + ke \cdot \frac{d\theta m(t)}{dt} = 0$$

$$Tm(t) = km \cdot i(t)$$

$$km \cdot i(t) - b \frac{d\theta m(t)}{dt} - Tn1 = Jm \cdot \frac{d^2\theta m(t)}{dt^2}$$

$$Tn2 - b \frac{d\theta l(t)}{dt} = Jl \cdot \frac{d^2\theta l(t)}{dt^2}$$

$$\frac{N1}{N2} = \frac{Tn1}{Tn2} ; \frac{N1}{N2} \cdot Tn2 = Tn1 ; \frac{N2}{N1} \cdot Tn1 = Tn2$$

Despejando Tn1 y Tn2 de las ecuaciones obtenidas para los movimientos de $\theta m(t)$ y $\theta l(t)$

$$km \cdot i(t) - b \frac{d\theta m(t)}{dt} - Jm \cdot \frac{d^2\theta m(t)}{dt^2} = Tn1$$

$$Tn2 = b \frac{d\theta l(t)}{dt} + Jl \cdot \frac{d^2\theta l(t)}{dt^2}$$

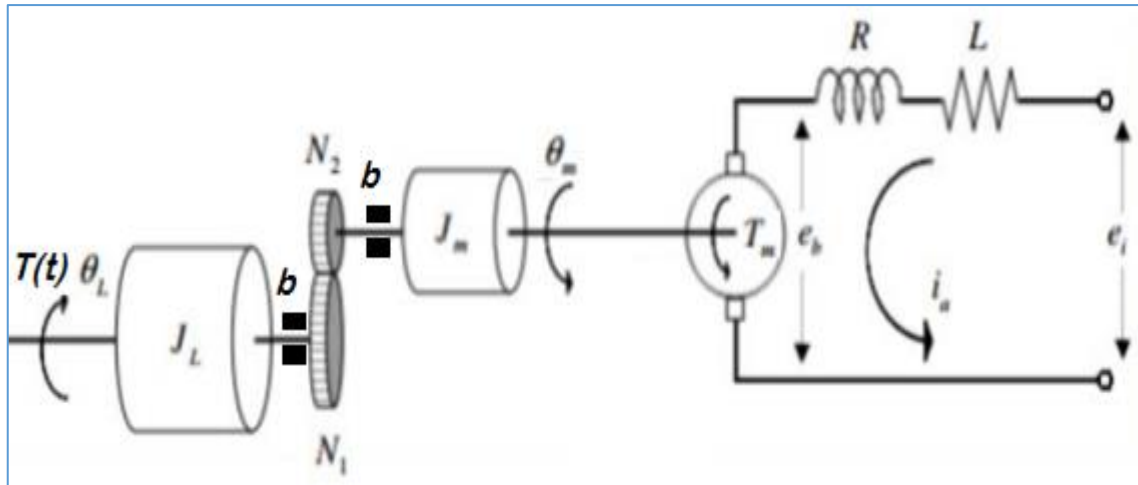
Finalmente, se obtienen las ecuaciones gobernantes en términos de las 3 variables dinámicas planteadas $\theta m(t)$, $\theta l(t)$, $i(t)$ tenemos:

$$-Ei(t) + L \frac{di(t)}{dt} + R \cdot i(t) + ke \cdot \frac{d\theta m(t)}{dt} = 0$$

$$km \cdot i(t) - b \frac{d\theta m(t)}{dt} - \frac{N1}{N2} \left[b \frac{d\theta l(t)}{dt} + Jl \cdot \frac{d^2\theta l(t)}{dt^2} \right] = Jm \cdot \frac{d^2\theta m(t)}{dt^2}$$

$$\frac{N2}{N1} \left[km \cdot i(t) - b \frac{d\theta m(t)}{dt} - Jm \cdot \frac{d^2\theta m(t)}{dt^2} \right] - b \frac{d\theta l(t)}{dt} = Jl \cdot \frac{d^2\theta l(t)}{dt^2}$$

1.8.4. Generador



Para la parte mecánica:

$$T(t) - b \frac{d\theta_l(t)}{dt} - T_{n1} = J_l \cdot \frac{d^2\theta_l(t)}{dt^2}$$

$$T_{n2} - b \frac{d\theta_m(t)}{dt} - T_m = J_m \cdot \frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2}$$

Para la parte eléctrica:

$$-Eb(t) + R \cdot i(t) + L \frac{di(t)}{dt} + Ei(t) = 0$$

$$Ei(t) = Eb(t) - R \cdot i(t) - L \frac{di(t)}{dt}$$

Aplicando las relaciones:

$$Eb(t) = k_e \cdot \frac{d\theta_m(t)}{dt}$$

$$T_m(t) = k_m \cdot i(t)$$

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{T_{n1}}{T_{n2}} ; \frac{N_1}{N_2} \cdot T_{n2} = T_{n1} ; \frac{N_2}{N_1} \cdot T_{n1} = T_{n2}$$

$$T(t) - b \frac{d\theta_l(t)}{dt} - J_l \cdot \frac{d^2\theta_l(t)}{dt^2} = T_{n1}$$

$$T_{n2} = J_m \cdot \frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} + b \frac{d\theta_m(t)}{dt}$$

Se reemplaza las ecuaciones gobernantes en términos de las 3 variables dinámicas planteadas $\theta_m(t)$, $\theta_l(t)$, $i(t)$ tenemos:

$$Ei(t) = k_e \cdot \frac{d\theta_m(t)}{dt} - R \cdot i(t) - L \frac{di(t)}{dt}$$

$$T(t) - b \frac{d\theta_l(t)}{dt} - \frac{N1}{N2} \left(Jm \cdot \frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2} + b \frac{d\theta_m(t)}{dt} \right) = Jl \cdot \frac{d^2\theta_l(t)}{dt^2}$$

$$\frac{N2}{N1} \left[T(t) - b \frac{d\theta_l(t)}{dt} - Jl \cdot \frac{d^2\theta_l(t)}{dt^2} \right] - b \frac{d\theta_m(t)}{dt} - km \cdot i(t) = Jm \cdot \frac{d^2\theta_m(t)}{dt^2}$$

2. Laplace

La transformada de Laplace es un operador lineal que facilita la resolución de ecuaciones diferenciales. Al realizar la transformada de Laplace es posible desarrollar ecuaciones diferenciales con la aplicación de operaciones algebraicas.

$$F(s) = \mathcal{L}_t \{f(t)\} (s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

$$L\{f(t)\} = F(s)$$

2.1. Transformada de Laplace de ecuaciones diferenciales lineales

En la teoría de control, al realizar la transformada de Laplace, se hace posible realizar un análisis en frecuencia, que en la aplicación de sistemas dinámicos permite generalizar el comportamiento de sistemas, lo que conlleva a demostrar que por ejemplo un sistema eléctrico tiene un comportamiento similar en sus variables a un sistema mecánico o térmico entre otros.

De manera tal, que realizando analogías entre sistemas, nos provee una herramienta muy útil para predecir el comportamiento de un modelo a partir de otro de diferente naturaleza.

Luego de tener el modelo matemático de nuestro sistema dinámico, realizaremos la transformada de Laplace a estas ecuaciones para con ellas realizar tareas de control y análisis dinámicos.

Para las transformadas de Laplace diferenciales que vamos a utilizar vamos a definir la forma genérica de hacerlo, teniendo como premisa condiciones iniciales igual a 0; más adelante en este libro plantearemos algunos ejercicios en donde la respuesta debe tener en cuenta unas condiciones iniciales existentes, pero por el momento, buscaremos encontrar funciones de transferencia en los sistemas.

$$L\{F(t)\} = f(s)$$

$$L\left\{\frac{dF(t)}{dt}\right\} = s \cdot f(s)$$

$$L\left\{\frac{d^2F(t)}{dt^2}\right\} = s^2 \cdot f(s)$$

$$L\left\{\frac{d^n F(t)}{dt^n}\right\} = s^n \cdot f(s)$$

2.2. Ejemplos

Tomando ecuaciones encontradas en las secciones anteriores, buscamos la transformada de Laplace en condiciones iniciales = 0.

$$F - C(\dot{X}) = m \ddot{X}$$

$$F(t) - C \frac{dX(t)}{dt} = m \frac{d^2X(t)}{dt^2}$$

$$F(s) - C S X(s) = m S^2 X(s)$$

$$F1 - K1(X1) - B1(\dot{X1}) - C(\dot{X1} + \dot{X2}) - K2(X1 + X2) = M1 \ddot{X1}$$

$$F1(t) - K1 X1(t) - B1 \frac{dX1(t)}{dt} - C \left(\frac{dX1(t)}{dt} + \frac{dX2(t)}{dt} \right) - K2 [X1(t) + X2(t)] = M1 \frac{d^2X1(t)}{dt^2}$$

$$F1(s) - K1 X1(s) - B1 S X1(s) - C(S X1(s) + S X2(s)) - K2 [X1(s) + X2(s)] = M1 S^2 X1(s)$$

$$\frac{N2}{N1} T(t) - D\dot{\theta} - [m \ddot{X} + C(\dot{X})] (R) = J \ddot{\theta}$$

$$\frac{N2}{N1} T(t) - D \frac{d\theta(t)}{dt} - \left[m \frac{d^2X(t)}{dt^2} + C \frac{dX(t)}{dt} \right] (R) = J \cdot \frac{d^2\theta(t)}{dt^2}$$

$$\frac{N2}{N1} T(s) - D S \theta(s) - [m S^2 X(s) + C S X(s)] (R) = J S^2 \theta(s)$$

2.3. Función de transferencia

Una función de transferencia es un modelo matemático que, a través de un cociente, relaciona la respuesta de un sistema (modelada o señal de salida) con una señal de entrada o excitación (también modelada). En la teoría de control, a menudo se usan las funciones de transferencia para caracterizar las relaciones entre las entradas y salidas de un sistema dinámico.

2.3.1. Ejemplos

Encontrar la función de transferencia $\frac{X(s)}{F(s)}$

$$F(s) - C S X(s) = m S^2 X(s)$$

$$F(s) = m S^2 X(s) + C S X(s)$$

$$F(s) = X(s) (m S^2 + C S)$$

$$\frac{X(s)}{F(s)} = \frac{1}{m S^2 + C S}$$

Encontrar la función de transferencia $\frac{X(s)}{F(s)}$

2.3.2. Modelamiento de sistemas en Laplace

2.3.3. Modelamiento eléctrico con Laplace

circuito

Circuito eléctrico de una vez con la transformada

The image shows handwritten mathematical work for finding the transfer function of an R-L-C circuit. On the left, a circuit diagram shows an input voltage V_i connected to a resistor R , an inductor L , and a capacitor C in series. The output voltage V_o is taken across the capacitor. A clockwise current I is indicated. Below the diagram, the following equations are written:

$$-V_i + RI + LI + \frac{1}{CS} I = 0$$

$$-V_i + V_R + V_L + V_C = 0$$

$$CS I(s) (LS + R + \frac{1}{CS}) = V_i(s) CS$$

A small circuit diagram shows $V_i(s)$ entering a box with $I(s)$ exiting. Below it, the current is solved as:

$$I(s) (LCS^2 + RCS + 1) = V_i(s) CS$$

$$I(s) = \frac{CS}{LCS^2 + RCS + 1} V_i(s)$$

On the right side, the output voltage is related to the current:

$$V_o = I \frac{1}{CS} \Rightarrow V_o(s) CS = I(s) \quad V_o(s) = \frac{I(s)}{CS}$$

Two block diagrams are shown. The first shows $V_i(s)$ entering a block with transfer function $\frac{CS}{LCS^2 + RCS + 1}$, which outputs $I(s)$. This $I(s)$ then enters a second block with transfer function $\frac{1}{CS}$, which outputs $V_o(s)$. The second block diagram shows $V_i(s)$ entering a single block with transfer function $\frac{1}{LCS^2 + RCS + 1}$, which outputs $V_o(s)$.

2.4 Representación en el tiempo con Amplificadores operacionales

Los amplificadores operacionales actuando en lazo cerrado, permite generar modelos matemáticos del tipo integrador y diferencial, de manera que con ellos podemos ya realizar montajes electrónicos que simulan el comportamiento de sistemas dinámicos lineales.

$V_+ = V_-$

$I_1 = I_2$

$V_1 - 0 = \frac{R_2}{R_1} (-V_0)$

$V_0 = -V_1 \left(\frac{R_2}{R_1} \right)$

$-R_2 V_1 = R_1 V_0 - 2R_1 V_0$

$2R_1 V_0 = R_1 V_1 + R_2 V_1$

$2R_1 V_0 = V_1 (R_1 + R_2)$

$V_0 = V_1 \left(\frac{R_1 + R_2}{2R_1} \right)$

$-\frac{V_1}{R_1} = \frac{V_0 - 2V_0}{R_2}$

$-\frac{V_1}{R_1} = \frac{V_0 - 2V_0}{R_2}$

$V_1 - V_x + V_2 - V_x = V_x - V_0$

$\frac{V_1 - V_x}{R} + \frac{V_2 - V_x}{R} = \frac{V_x - V_0}{R}$

$V_1 - V_x + V_2 - V_x = V_x - V_0$

$V_1 + V_2 - 3V_x = -V_0$

$-V_3 - V_4 + 3V_x = 0$

$V_1 - V_3 + V_4 - V_4 = -V_0$

$V_0 = V_1 + V_3 - V_2 - V_1$

$V_0 = ?$

$\frac{1}{Cs} V_1 - 0 = 0 - V_0 \cdot \frac{1}{Cs}$

$\frac{V_1}{RCS} = -V_0$

$V_0 = -\frac{1}{RCS} V_1$

INTEGRADORA

$V_0 = -\frac{1}{RCS} V_1$

$V_0 = -V_1 RCS$

$F(s) = \frac{10}{s} \cdot \frac{1}{s} = \frac{10}{s^2}$

$F = 1$

$F - 10(x-y) = 5\ddot{x}$

$\ddot{x} = \frac{1}{5}(F - 10x + 10y)$

$-10(y-x) - \frac{1}{5}\dot{y} = 0$

$\dot{y} = 50(x-y) = 50x - 50y$

$(x-y) = \frac{1}{5}\dot{y}$

$R_1 + R_2 = 10$

$R_1 + R_2 = 20R_1$

$R_1 = 19R_1$

3. Representación en diagramas de bloques

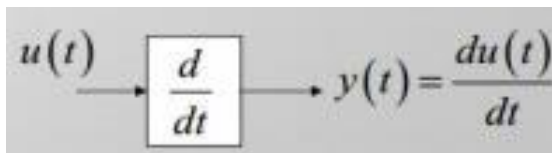
3.1. Reglas para la representación en bloques

La representación en bloques nos permitirá organizar y presentar el sistema de otra manera. Así mismo podremos utilizar un software como MATLAB para modelar el sistema y verificar el comportamiento de las variables.

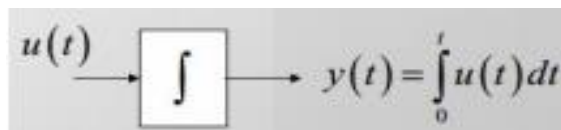
a. Bloque de ganancia



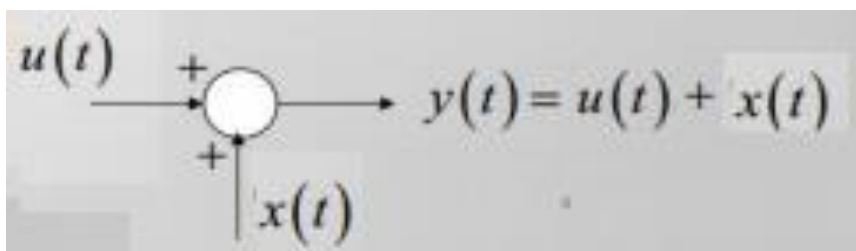
b. Bloque derivador



c. Bloque integrador

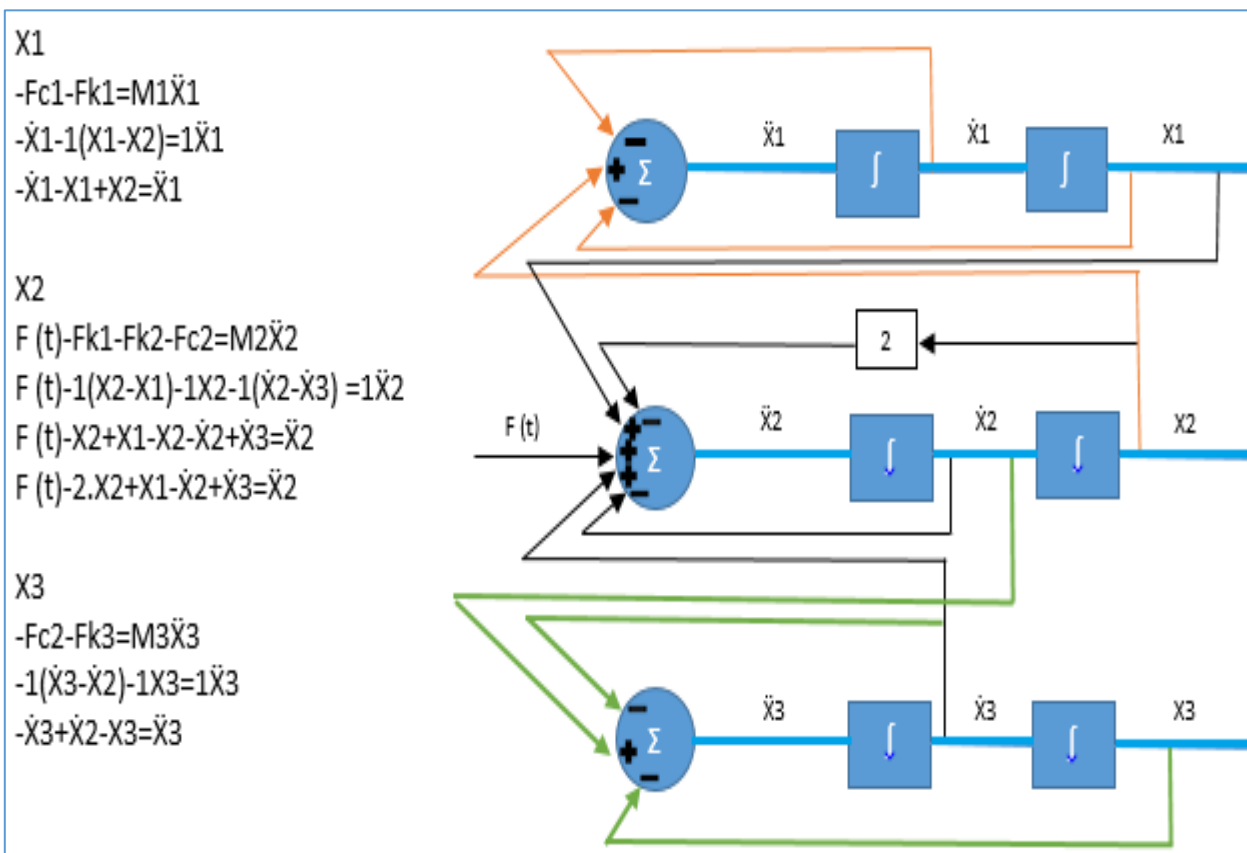
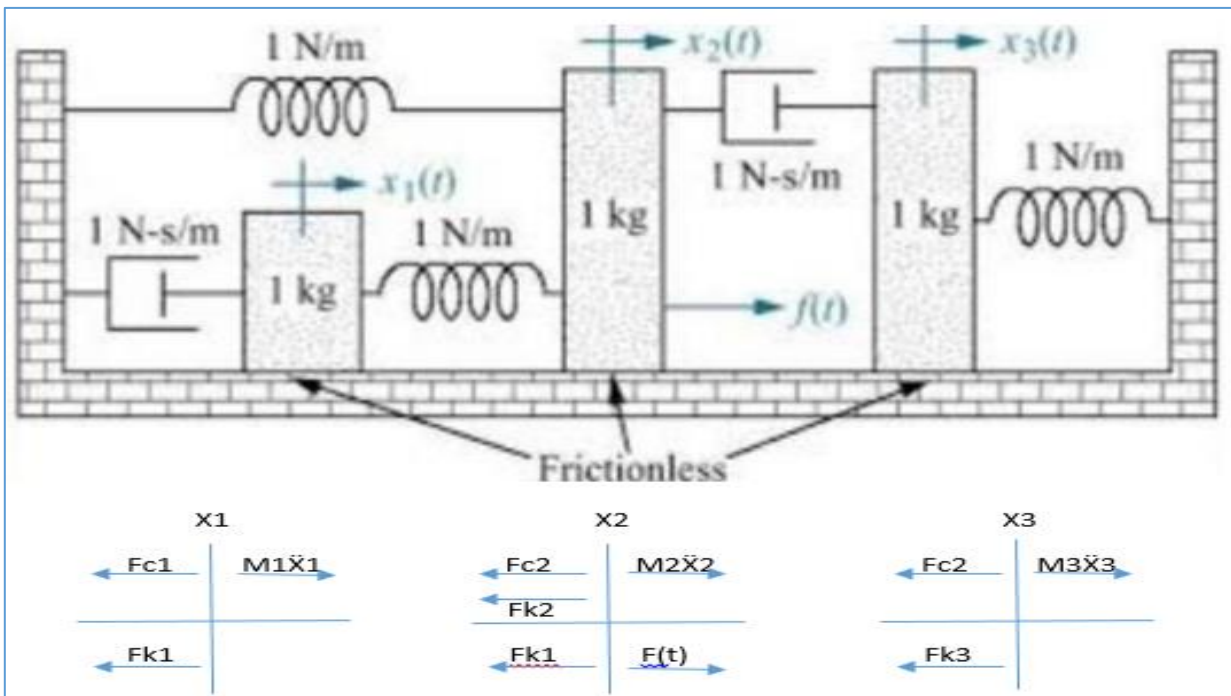


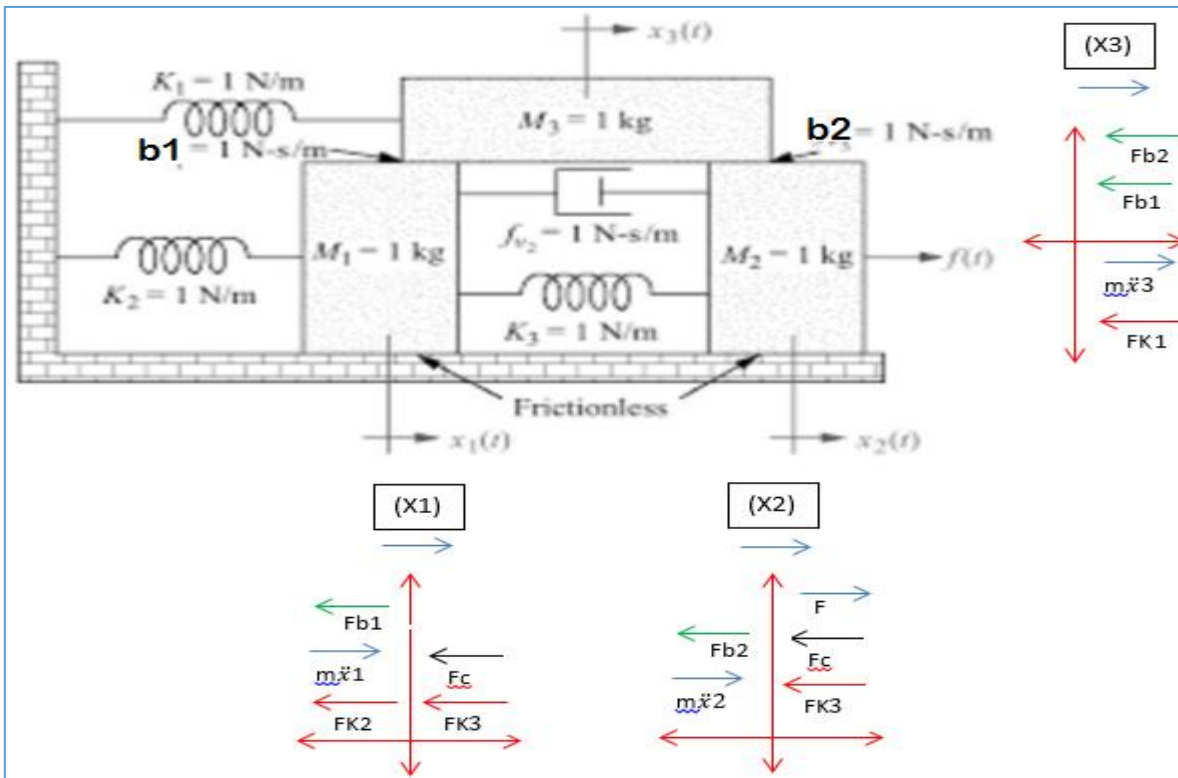
d. Bloque de suma



3.2. Representación en el tiempo

Para la representación en bloques.





- (X1)

$$-F_{K2} - F_{K3} - F_C - F_{B1} = m\ddot{x}_1$$

$$-1(X_1) - 1(X_1 - X_2) - 1(\dot{X}_1 - \dot{X}_2) - 1(\dot{X}_1 - \dot{X}_3) = \ddot{X}_1$$

$$(\ddot{X}_1) = -2X_1 - 2\dot{X}_1 + X_2 + \dot{X}_2 + \dot{X}_3$$
- (X2)

$$F - F_{K3} - F_C - F_{B2} = m\ddot{X}_2$$

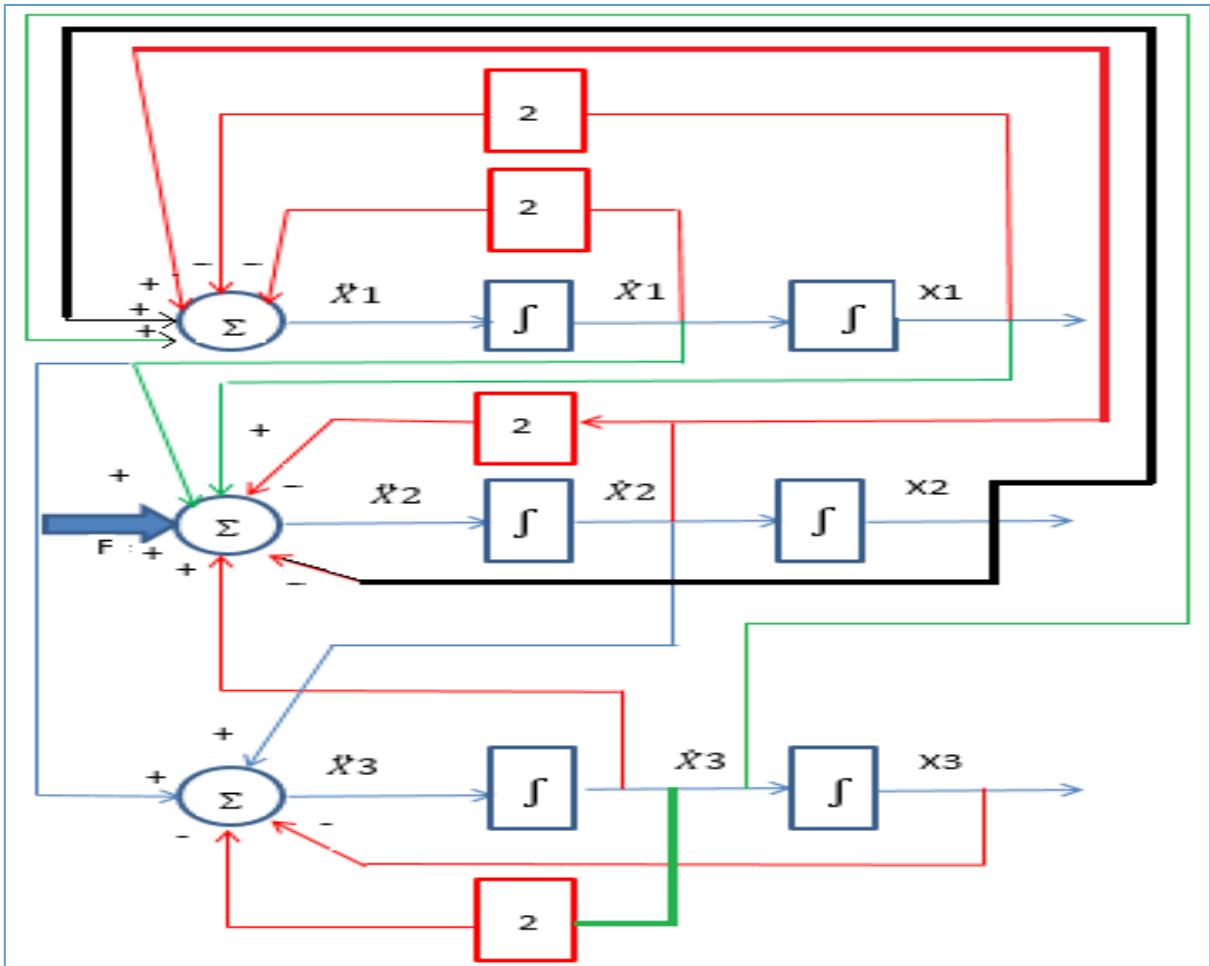
$$F - 1(X_2 - X_1) - 1(\dot{X}_2 - \dot{X}_1) - 1(\dot{X}_2 - \dot{X}_3) = \ddot{X}_2$$

$$(\ddot{X}_2) = F - X_2 - 2\dot{X}_2 + X_1 + \dot{X}_1 + \dot{X}_3$$
- (X3)

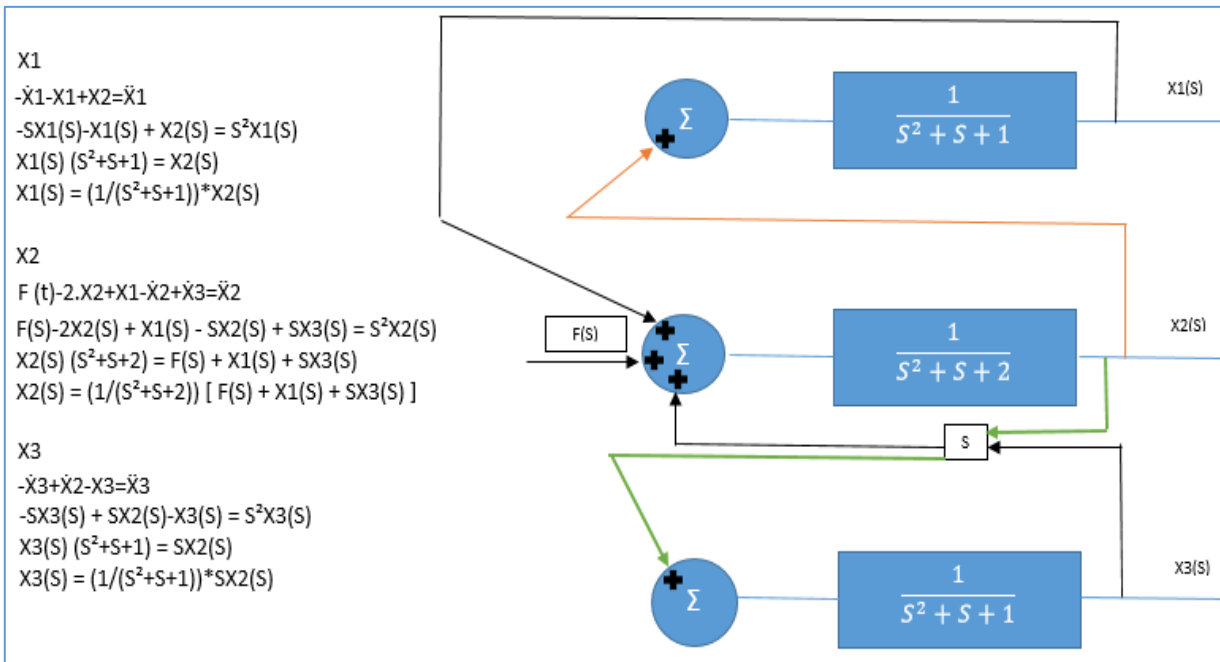
$$-F_{K1} - F_{B1} - F_{B2} = m\ddot{X}_3$$

$$-1(X_3) - 1(\dot{X}_3 - \dot{X}_1) - 1(\dot{X}_3 - \dot{X}_2) = \ddot{X}_3$$

$$(\ddot{X}_3) = -X_3 - 2\dot{X}_3 + \dot{X}_1 + \dot{X}_2$$

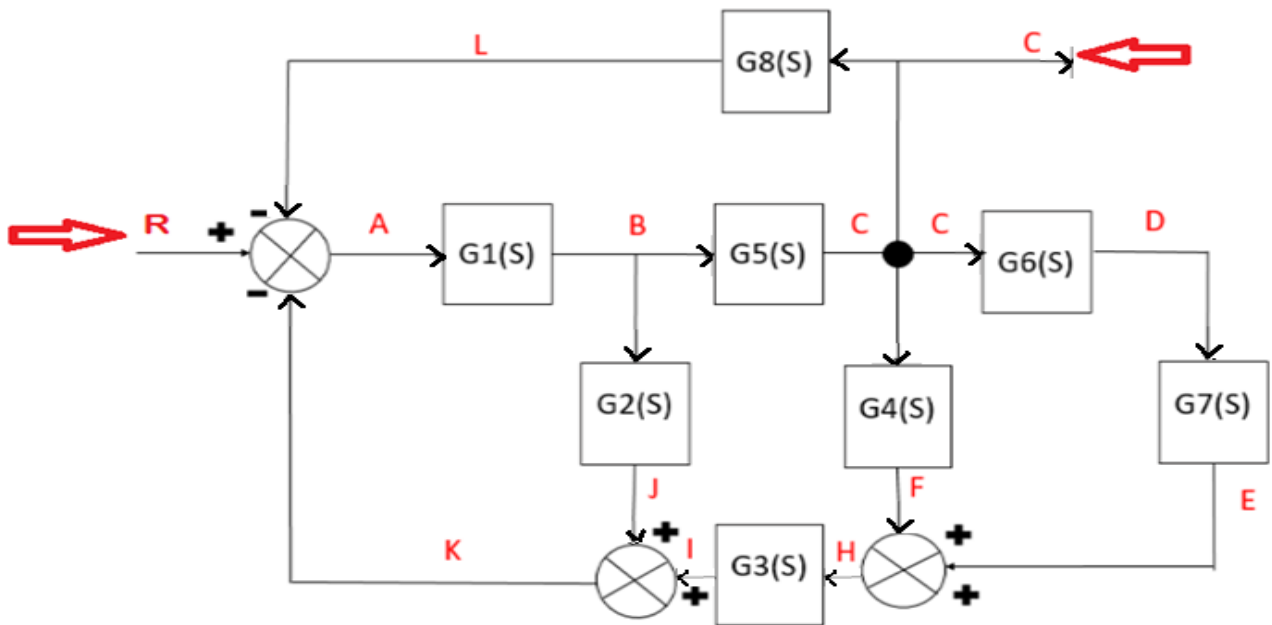


3.3. Representación en frecuencia



3.4. Reducción de bloques

3.4.1. Reducción matemática simple



Premisas

$$A=R-K-L // B=AG1 // C=BG5 // D=CG6 // E=DG7 // F=CG4 // H=F+E \\ I=HG3 // J=BG2 // K=J+I // L = CG8$$

Sustituciones

$$\frac{C}{R} = ? \Rightarrow A=R-K-L \Rightarrow A=R-K-CG8 \Rightarrow A=\frac{B}{G1} \Rightarrow \frac{B}{G1} = R-K-CG8 \Rightarrow \frac{B}{G1} = R-(J+I)-CG8 \Rightarrow$$

$$B=\frac{C}{G5} \Rightarrow \frac{C}{G5G1} = R-(J+I)-CG8 \Rightarrow \frac{C}{G5G1} = R-(BG2+HG3)-CG8 \Rightarrow \frac{C}{G5G1} = R-\left(\frac{CG2}{G5} + (F+E)G3\right)-CG8 \Rightarrow$$

$$\frac{C}{G5G1} = R-\left(\frac{CG2}{G5} + (CG4+DG7)G3\right)-CG8 \Rightarrow \frac{C}{G5G1} = R-\left(\frac{CG2}{G5} + (CG4+CG6G7)G3\right)-CG8 \Rightarrow$$

$$C = RG5G1 - G5G1\left(\frac{CG2}{G5} + (CG4+CG6G7)G3\right) - CG8G5G1 \Rightarrow C = RG5G1 - CG2G1 - G5G1(CG4+CG6G7)G3 - CG8G5G1$$

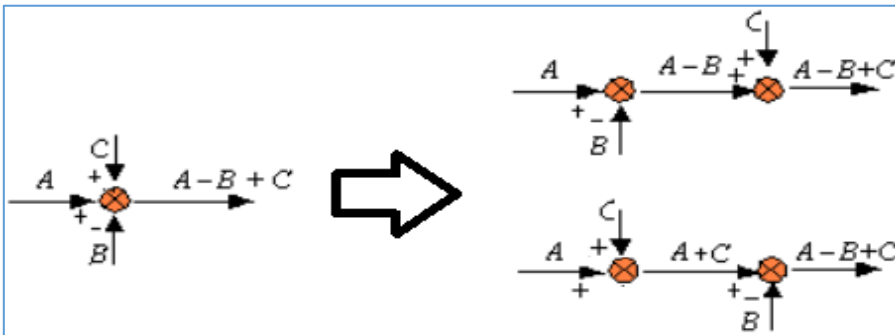
$$C = RG5G1 - CG1G2 - CG1G3G4G5 - CG1G3G5G6G7 - CG1G5G8 \Rightarrow C(1+G1G2+G1G3G4G5+G1G3G5G6G7+G1G5G8) = RG5G1$$

$$\Rightarrow \frac{C}{R} = \frac{G5G1}{(1+G1G2+G1G3G4G5+G1G3G5G6G7+G1G5G8)}$$

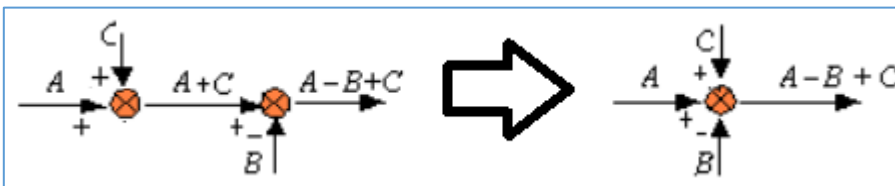
3.4.2.Reducción aplicando propiedades

3.4.2.1. Reglas de reducción

a. Romper puntos de suma



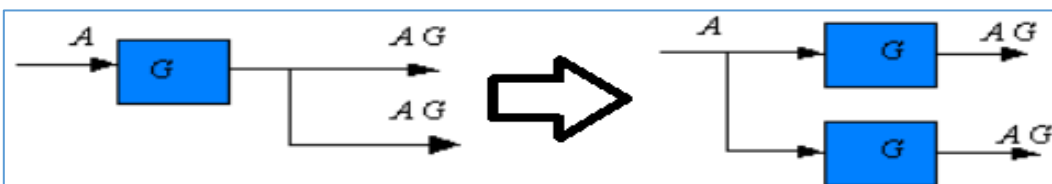
b. Unir puntos de suma



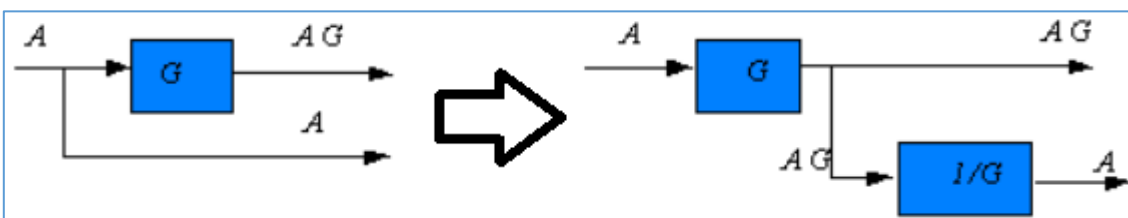
c. Unir cajas en línea



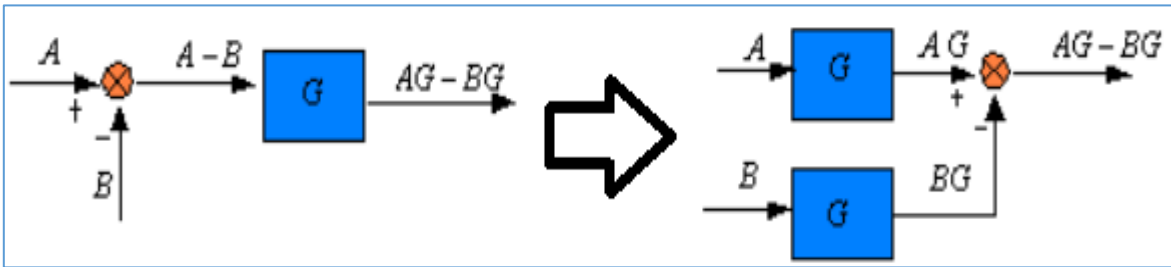
d. Trasladar un punto de unión atrás



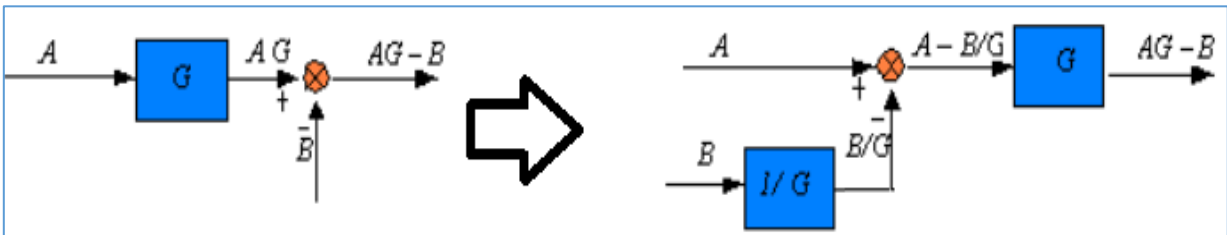
e. Trasladar un punto de unión adelante



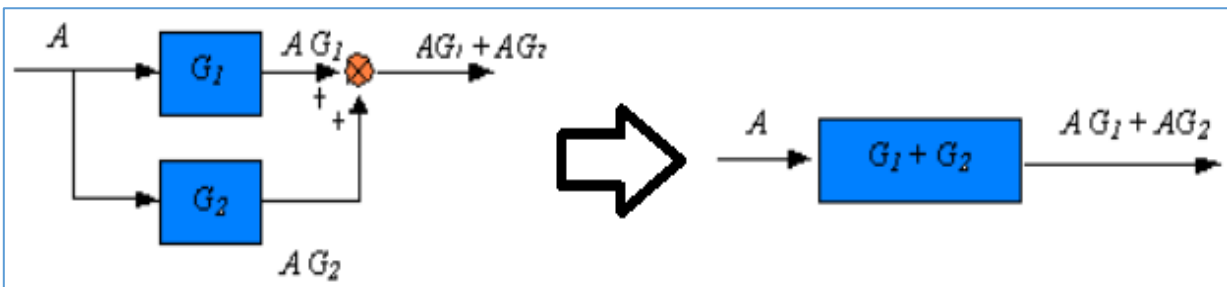
f. Trasladar puntos de suma adelante



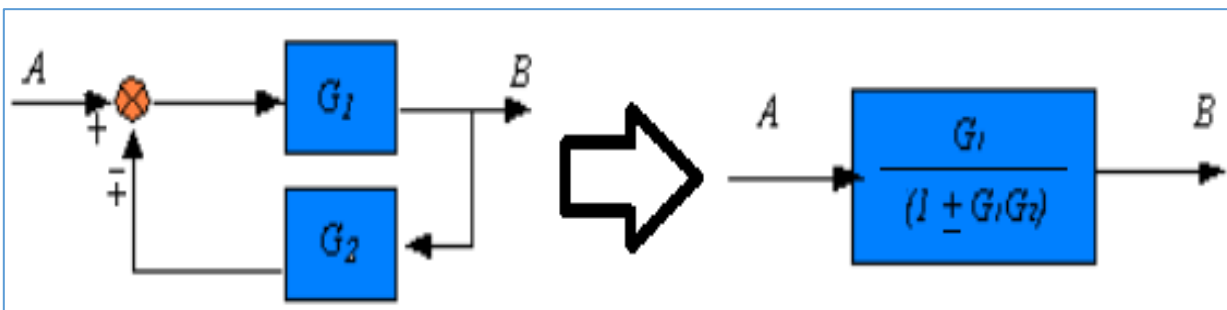
g. Trasladar puntos de suma atrás



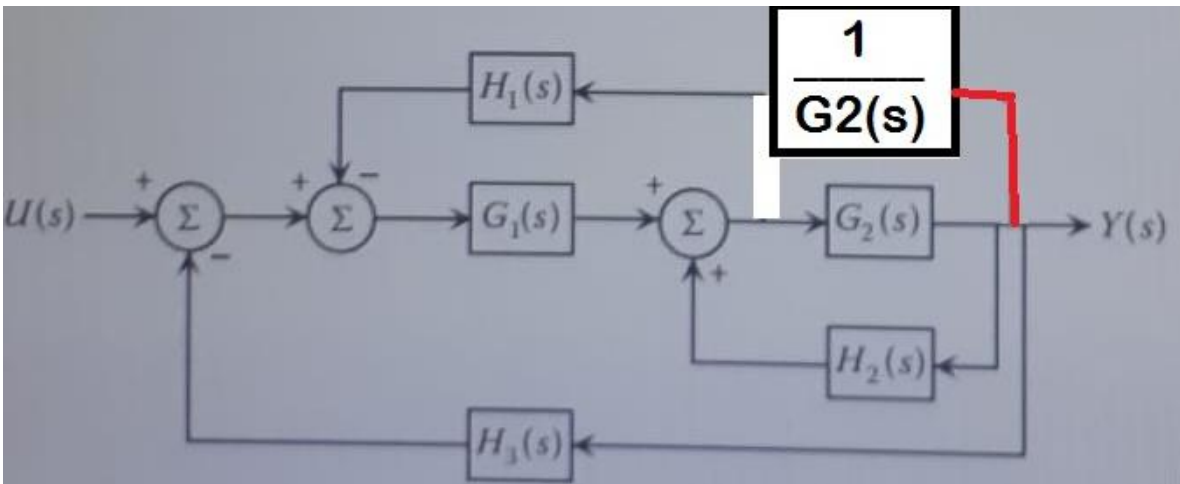
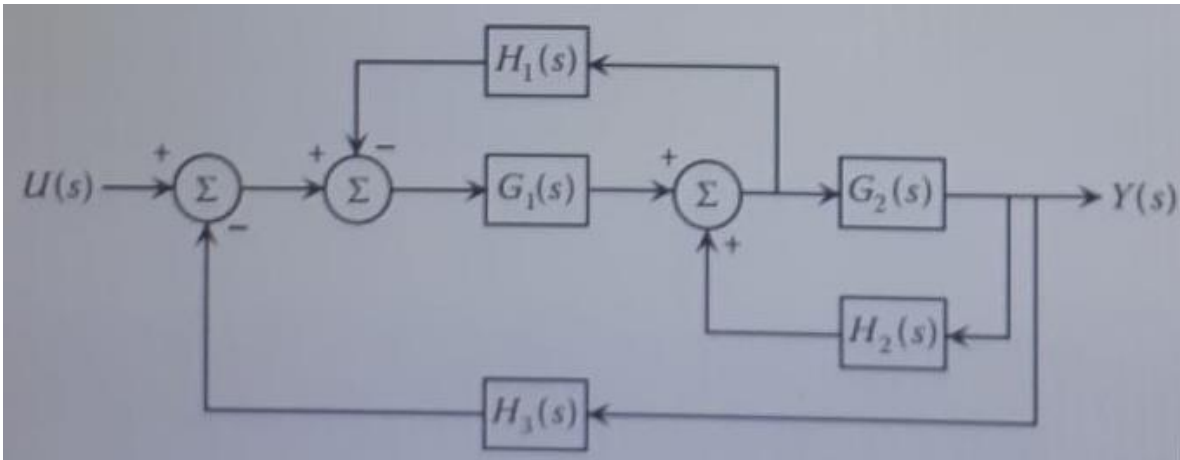
h. Cajas en paralelo

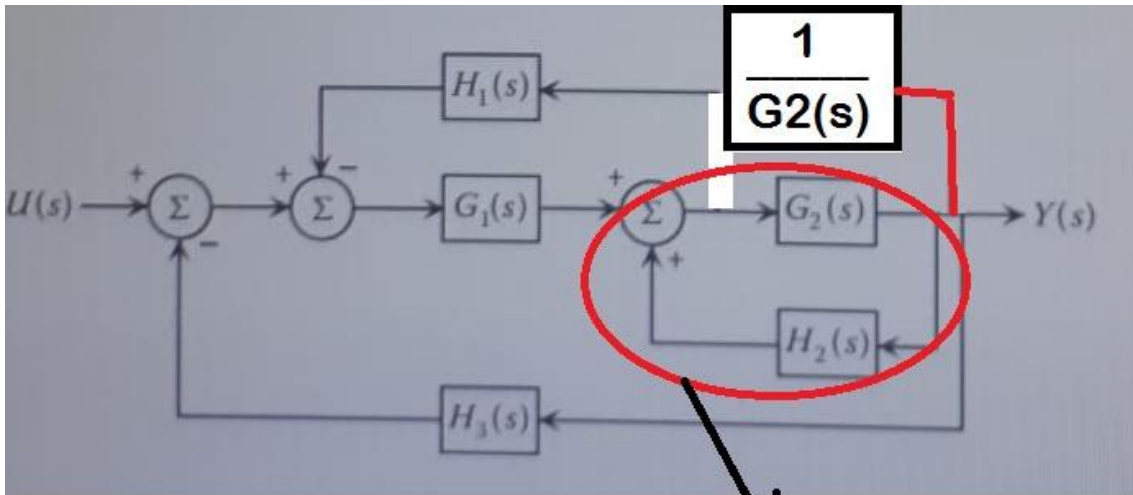


i. Realimentación simplificada



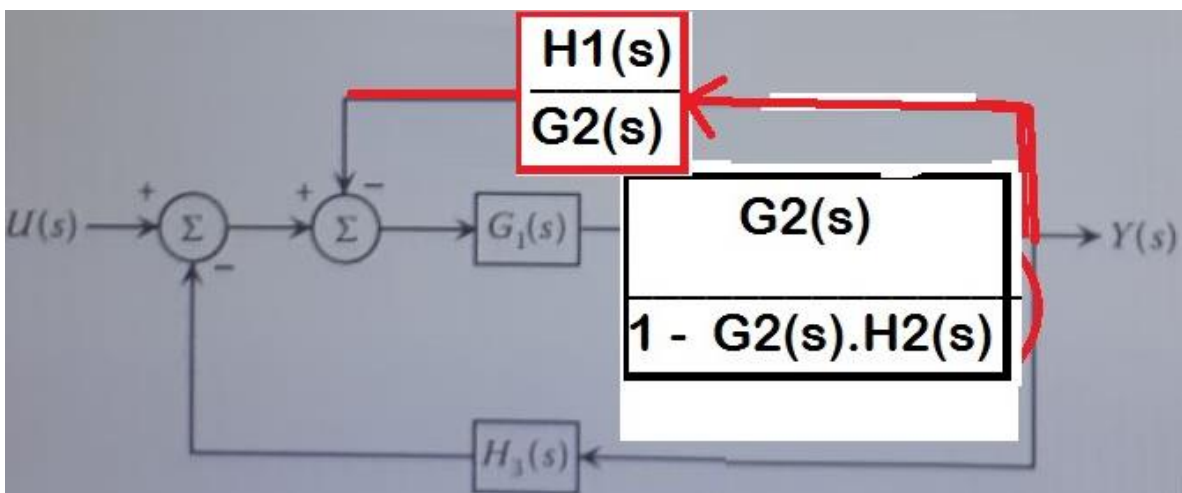
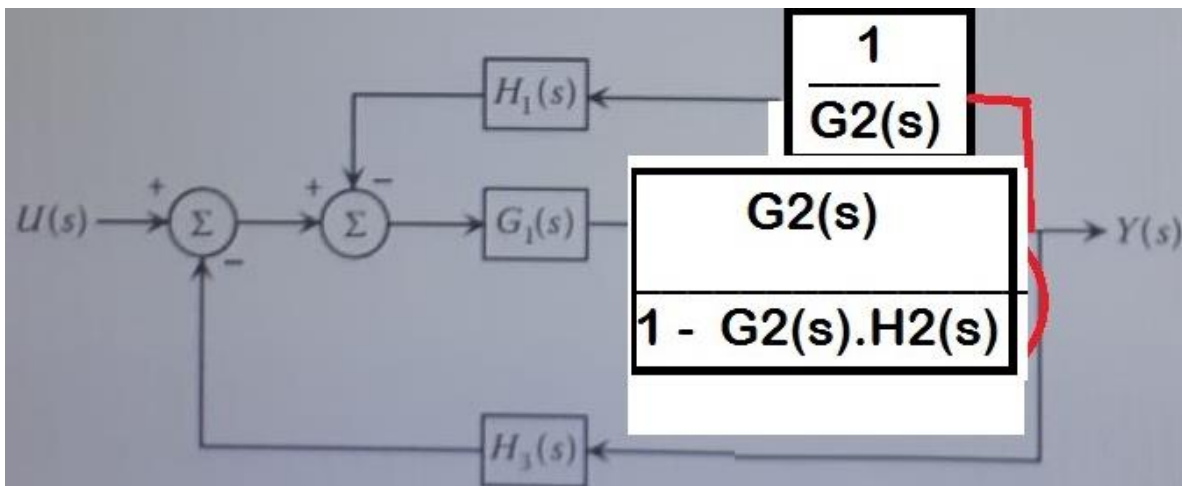
3.4.2.2. Ejemplos

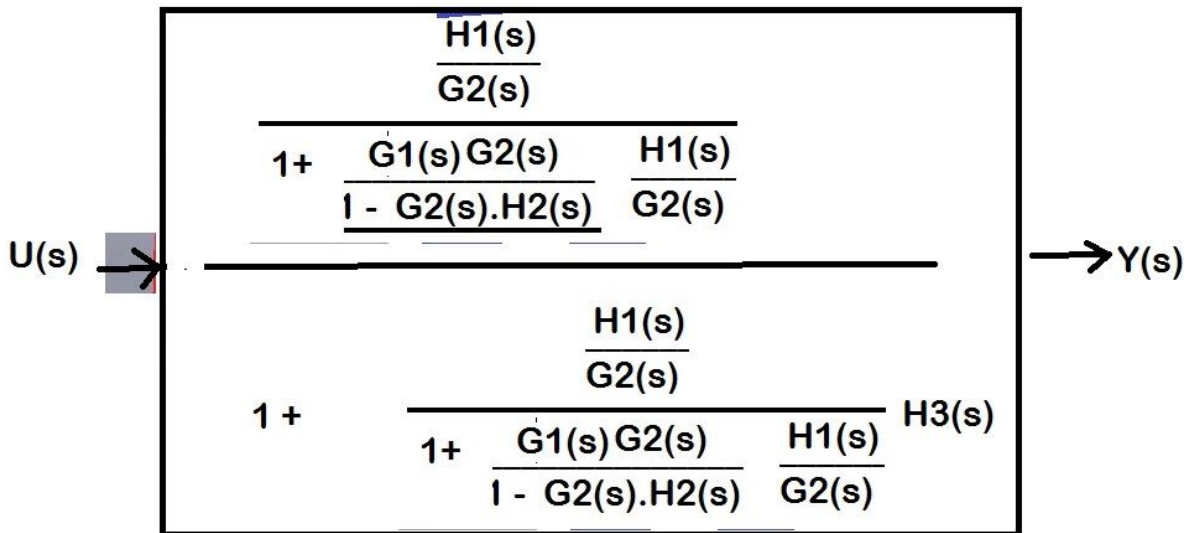
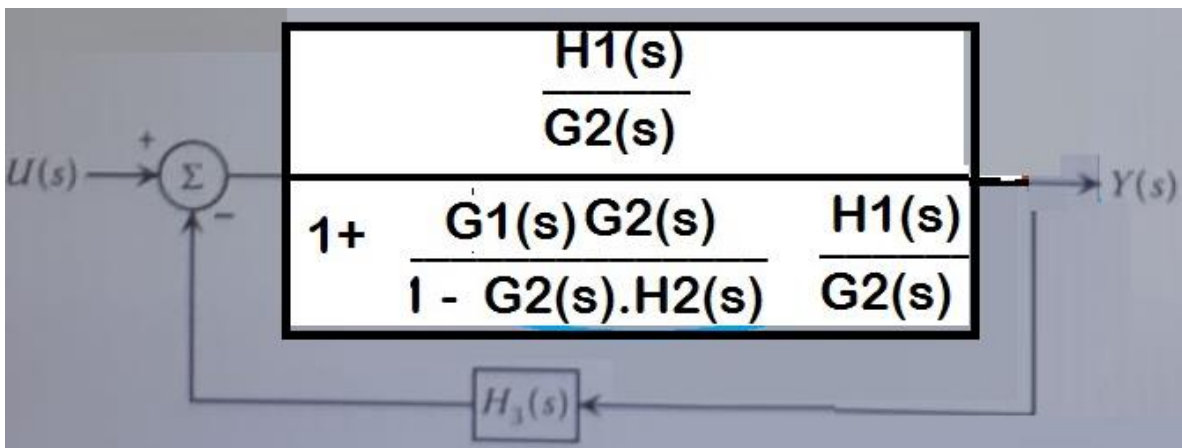
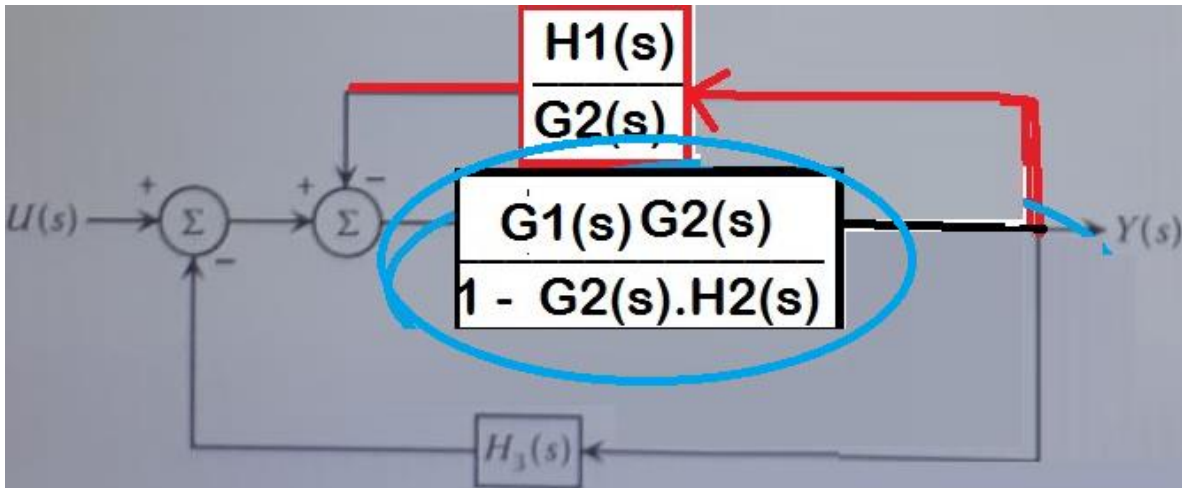




$G_2(s)$

$$1 - G_2(s) \cdot H_2(s)$$





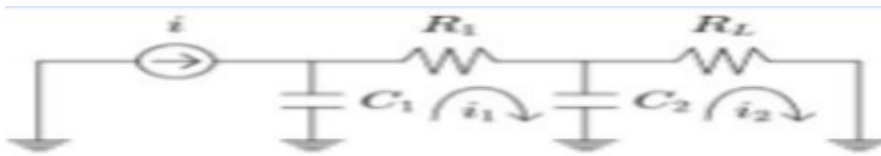
- 4. Analogías del modelamiento de sistemas dinámicos.
 - 4.1. Analogía en potencia
 - 4.2. Funciones de transferencia semejantes entre sistemas

Transformadores

Multiplicadores de presión, Pistones neumáticos

Engranajes y poleas

- 4.3. Modelamiento de llenado de tanques con circuito eléctrico



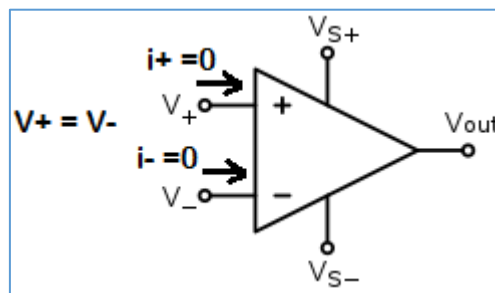
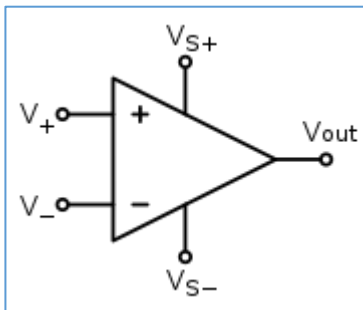
4.4. Representación electrónica de funciones de transferencia

Amplificador operacional

El amplificador operacional es un dispositivo que tiene varias aplicaciones. Funciona como comparador, como amplificador, filtraje de señales, y entre estas aplicaciones encontramos la simulación de modelos dinámicos en donde el amplificador operacional nos presta el servicio de integrador, derivador, multiplicador y sumador de señales.

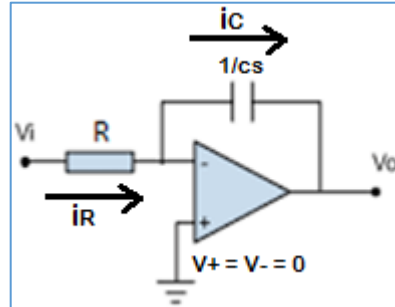
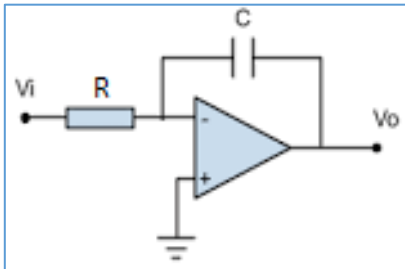
Este dispositivo posee 5 pines o puntos de conexión, en donde un pin funciona como salida (V_{out}), dos pines como entradas (V_+ , V_-) y 2 pines para su alimentación (V_{S+} , V_{S-}) que puede ser un voltaje DC de diferentes proporciones según su aplicación.

Posee las siguientes características básicas: -la corriente que entra al amplificador por los pines de entrada es igual a 0, y los voltajes en los puntos de entrada son iguales.



De manera que al hacer un analisis electrico y posteriormente encontrar una funcion de transferencia entre un voltaje de entrada y un voltaje de salida, para los siguientes arreglos, encontramos que:

Integrador



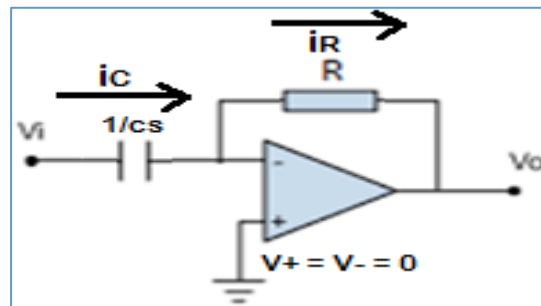
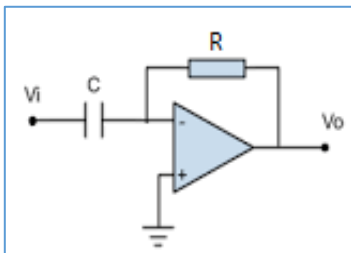
Dado que la corriente que entra al amplificador es igual a 0 podemos afirmar que:

$$iR = iC$$

$$\frac{Vi - 0}{R} = \frac{0 - Vo}{1/CS}$$

$$G(s) = \frac{Vo}{Vi} = -\frac{1}{RCS}$$

Derivador



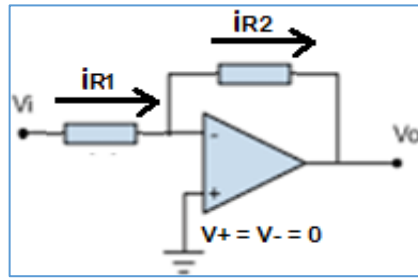
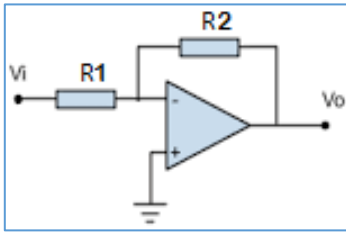
Dado que la corriente que entra al amplificador es igual a 0 podemos afirmar que:

$$iC = iR$$

$$\frac{Vi - 0}{1/CS} = \frac{0 - Vo}{R}$$

$$G(s) = \frac{Vo}{Vi} = -RCS$$

Proporcional



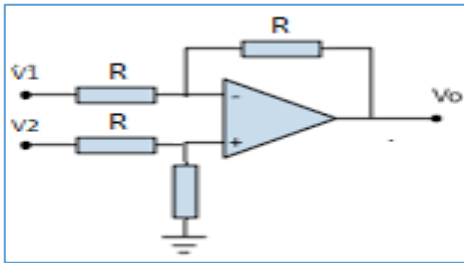
Dado que la corriente que entra al amplificador es igual a 0 podemos afirmar que:

$$iR1 = iR2$$

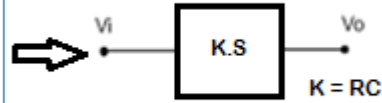
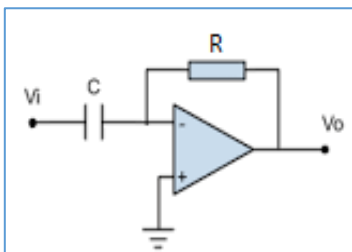
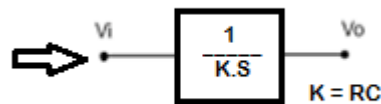
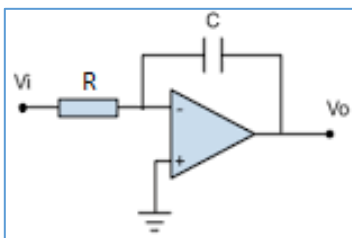
$$\frac{Vi - 0}{R1} = \frac{0 - Vo}{R2}$$

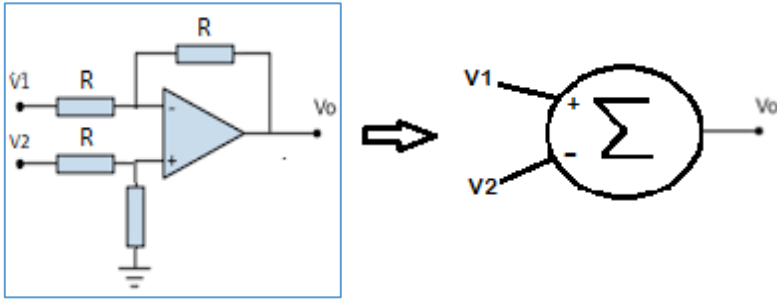
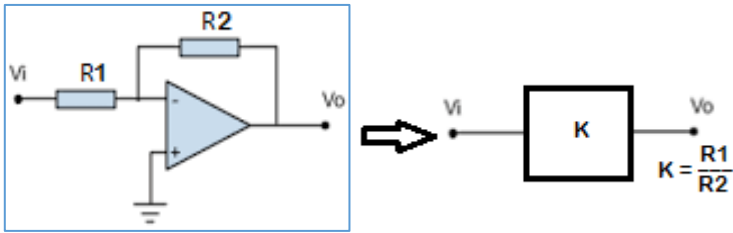
$$G(s) = \frac{Vo}{Vi} = -\frac{R2}{R1}$$

Punto de suma



Finalmente podemos concluir que estos arreglos electrónicos poseen las siguientes funciones de transferencia (obviando el signo negativo):





5. Señales de excitación y transformada inversa

5.1. Funciones genéricas

- $F(t) = k \delta(t)$
- $F(t) = k$
- $F(t) = k t$
- $F(t) = k t^n$
- $F(t) = k e^{-at}$
- $F(t) = k \text{sen}(wt)$
- $F(t) = k \text{cos}(wt)$

5.2. Transformada de Laplace utilizando tablas

- $F(t) = k \delta(t) \rightarrow F(s) = k$
- $F(t) = k \rightarrow F(s) = \frac{K}{s}$
- $F(t) = k t \rightarrow F(s) = \frac{K}{s^2}$
- $F(t) = k t^n \rightarrow F(s) = \frac{K \cdot n!}{s^{n+1}}$
- $F(t) = k e^{-at} \rightarrow F(s) = \frac{K}{s+a}$

$$f. F(t) = k \operatorname{sen}(wt) \rightarrow F(s) = \frac{K.W}{s^2+W^2}$$

$$g. F(t) = k \operatorname{cos}(wt) \rightarrow F(s) = \frac{K.S}{s^2+W^2}$$

Ejemplos:

5.3. Transformada de Laplace de funciones a trozos

5.4. Transformada inversa de Laplace utilizando tablas

$$a. F(s) = k \rightarrow F(t) = k \delta(t)$$

$$b. F(s) = \frac{K}{s} \rightarrow F(t) = k$$

$$c. F(s) = \frac{K}{s^2} \rightarrow F(t) = k t$$

$$d. F(s) = \frac{K}{s^n} \rightarrow F(t) = \frac{K \cdot t^{n-1}}{n!}$$

$$e. F(s) = \frac{K}{s+a} \rightarrow F(t) = k e^{-at}$$

$$f. F(s) = \frac{K.W}{s^2+W^2} \rightarrow F(t) = k \operatorname{sen}(wt)$$

$$g. F(s) = \frac{K.S}{s^2+W^2} \rightarrow F(t) = k \operatorname{cos}(wt)$$

Ejemplos:

Ejemplos:

5.5. Transformada inversa de Laplace utilizando fracciones parciales

Toda fracción polinómica (cociente de polinomios) de la forma $G(s) = N(s)/D(s)$, puede representarse en fracciones simples siempre y cuando la función sea propia, es decir, que el grado del polinomio $N(s)$ es menor que el grado del polinomio $D(s)$. En caso contrario, es decir, si el grado de $P(x)$ es mayor o igual al de $Q(x)$, la fracción se llama impropia. Toda

fracción impropia se puede expresar, efectuando la división, como la suma de un polinomio más una fracción propia. Es decir, $N(s)/D(s) = \{\text{polinomio}\} + N1(s) D(s)$

Un polinomio de grado n, tiene n raíces que bien pueden ser reales o imaginarias, de manera que dicho polinomio puede escribirse como el producto de n polinomios de primer grado.

$$F(s) = s^n + s^{n-1} + \dots + s^2 + s + C = (s+C_n) \cdot (s+C_{n-1}) \cdot \dots \cdot (s+C_2) \cdot (s+C_1)$$

Así mismo una fracción propia podemos representarla en fracciones más simples con la ayuda de coeficientes adicionales A_1, A_2, \dots, A_n

$$F(s) = \frac{s^m + s^{m-1} + \dots + s^2 + s + B}{s^n + s^{n-1} + \dots + s^2 + s + C} = \frac{A_n}{(s+C_n)} + \frac{A_{n-1}}{(s+C_{n-1})} + \dots + \frac{A_2}{(s+C_2)} + \frac{A_1}{(s+C_1)}$$

Y allí la transformada inversa de mi función $F(s)$ es

$$F(t) = A_n e^{-C_n \cdot t} + A_{n-1} e^{-C_{n-1} \cdot t} + \dots + A_2 e^{-C_2 \cdot t} + A_1 e^{-C_1 \cdot t}$$

5.6. Transformada inversa para raíces complejas

Cuando descomponemos en fracciones parciales, encontramos las raíces del polinomio característico (denominador), y allí, podemos encontrar raíces complejas;

$$F(s) = s^n + s^{n-1} + \dots + s^2 + s + C = (s+C_n) \cdot (s+C_{n-1}) \cdot \dots \cdot (s+C_2) \cdot (s+C_1)$$

$$F(s) = \frac{s^m + s^{m-1} + \dots + s^2 + s + B}{s^n + s^{n-1} + \dots + s^2 + s + C} = \frac{A_n}{(s+C_n)} + \frac{A_{n-1}}{(s+C_{n-1})} + \dots + \frac{A_2}{(s+C_2)} + \frac{A_1}{(s+C_1)}$$

Las raíces complejas siempre vienen en pares conjugados

$$F(s) = \frac{A_n}{(s+C_n)} + \frac{A_{n-1}}{(s+C_{n-1})} + \dots + \frac{A_2 + E_2 i}{(s+C_2 - D_2 i)} + \frac{A_2 - E_2 i}{(s+C_2 + D_2 i)} + \dots$$

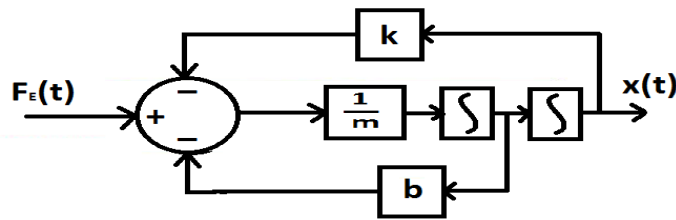
$$F(s) = \frac{A_n}{(s+C_n)} + \frac{A_{n-1}}{(s+C_{n-1})} + \dots + \frac{A_2 + E_2 i}{(s+C_2 - D_2 i)} + \frac{A_2 - E_2 i}{(s+C_2 + D_2 i)} + \dots$$

$$a. F_E(t) - k \cdot x(t) - b \frac{dx(t)}{dt} = m \frac{d^2x(t)}{dt^2}$$

b. las entradas son: $F_E(t)$

c. las salidas son: $x(t)$

d. los parametros son: k, b, m



La ecuación característica es: $(mS^2 + bS + k)$. $X(s) = F_E(s)$

La función de transferencia $G(s) = \frac{1}{(mS^2 + bS + k)}$

Las raíces del polinomio característico son

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4mk}}{2m}$$

Si $b^2 - 4mk > 0$ las raíces son reales y el sistema es estable

Si $b^2 - 4mk < 0$ entonces la raíz es compleja (imaginario) de la forma

$$\frac{-b \pm i \sqrt{4mk - b^2}}{2m} \quad \text{Siempre que } b > 0 \text{ el sistema es estable}$$

Independientemente de si la raíz es real o compleja.

O sea compleja si $b^2 - 4mk < 0$; $b^2 < 4mk$

Ambas respuestas serían la misma

Si b^2 es igual a m entonces $b^2 - 4mk < 0$ dado que k existe y es mayor que 0 igual que b y m . En este caso la raíz es imaginaria o compleja, mas sin embargo como $b > 0$ el sistema se estabiliza en

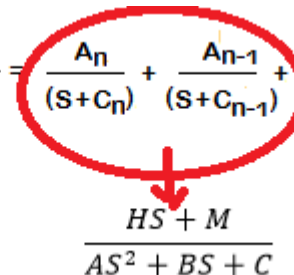
$$\frac{5}{b} \text{ segundos}$$

En realidad podríamos hablar de una presentación genérica en donde para raíces reales los coeficientes complejos son igual a 0.

$$F(s) = \frac{A_n + E_n i}{(S + C_n + D_n i)} + \frac{A_{n-1} + E_{n-1} i}{(S + C_{n-1} + D_{n-1} i)} + \dots + \frac{A_2 + E_2 i}{(S + C_2 + D_2 i)} + \frac{A_1 + E_1 i}{(S + C_1 + D_1 i)} + \dots$$

Al realizar la suma de ambos operando se obtiene un polinomio de grado 2 expresado de forma genérica

$$F(s) = \frac{s^m + s^{m-1} + \dots + s^2 + s + B}{s^n + s^{n-1} + \dots + s^2 + s + C} = \frac{A_n}{(s+C_n)} + \frac{A_{n-1}}{(s+C_{n-1})} + \dots + \frac{A_2}{(s+C_2)} + \frac{A_1}{(s+C_1)}$$



$$\frac{HS + M}{AS^2 + BS + C}$$

Y es por esta razón que cualquier polinomio podemos descomponerlo en fracciones de primer y segundo grado.

Para hallar la transformada inversa de estas fracciones podemos utilizar varios métodos.

5.6.1.1. Ajuste de cuadrados

Dada ecuación genérica que encontramos para fracciones parciales de raíces complejas al operar entre ellas es:

$$Y(s) = \frac{HS + M}{AS^2 + BS + C}$$

Podemos ajustar cuadrados en el denominador obteniendo un corrimiento en la variable S que se obtiene dividiendo el coeficiente que acompaña al coeficiente B

$$Y(s) = \frac{HS + M}{\left(s + \frac{B}{2}\right)^2 + C - \left(\frac{B}{2}\right)^2} = \frac{HS + M}{\left(s + \frac{B}{2}\right)^2 + K}$$

Donde K es constante.

Con esta operación buscamos aplicar transformada inversa con corrimiento para luego utilizar las tablas de transformada inversa y encontrar a Y(t) de manera directa

La regla de corrimiento para transformada de Laplace dice que:

$$L\{f(t)\} = F(s)$$

$$L\{e^{-at} f(t)\} = F(s + a)$$

Y para la transformada inversa

$$\tilde{L}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$$

$$\tilde{L}^{-1}\{F(s+a)\} = e^{-at} \tilde{L}^{-1}\{F(s)\} = e^{-at} f(t)$$

De esta manera podemos asumir el corrimiento de la variable S en Y(s) y la transformada inversa será directa utilizando senos y cosenos.

$$Y(s) = \frac{HS + M}{\left(s + \frac{B}{2}\right)^2 + K} = X\left(s + \frac{B}{2}\right)$$

$$X(s) = \frac{H\left(s - \frac{B}{2}\right) + M}{S^2 + K}$$

Utilizando las tablas de transformada inversa para seno y coseno podemos obtener de forma directa a Y(t)

$$F(t) = k \operatorname{sen}(wt) \rightarrow F(s) = \frac{K \cdot W}{S^2 + W^2}$$

$$F(t) = k \operatorname{cos}(wt) \rightarrow F(s) = \frac{K \cdot S}{S^2 + W^2}$$

Ejemplo

$$Y(s) = \frac{1}{S^2 + 4S + 10}$$

$$Y(s) = \frac{1}{(S+2)^2 + 6} = X(s+2)$$

$$X(s) = \frac{1}{(S)^2 + 6}$$

$$Y(t) = \frac{e^{-2t} \operatorname{sen}(\sqrt{6} t)}{\sqrt{6}}$$

Ejemplo

$$\frac{S+1}{S^2 + 4S + 10}$$

$$Y(s) = \frac{S + 1}{(S + 2)^2 + 6} = \frac{S + 1 + (2 - 2)}{(S + 2)^2 + 6} = \frac{S + 2 - 1}{(S + 2)^2 + 6}$$

$$Y(s) = \frac{S + 2}{(S + 2)^2 + 6} - \frac{1}{(S + 2)^2 + 6} = X(s + 2)$$

$$X(s) = \frac{S}{(S)^2 + 6} - \frac{1}{(S)^2 + 6}$$

$$Y(t) = e^{-2t} \cos(\sqrt{6} t) - \frac{e^{-2t} \text{sen}(\sqrt{6} t)}{\sqrt{6}}$$

5.6.1.2. Metodo de euler

El teorema de Euler para seno y coseno establece que:

$$e^{ix} = \cos x + i \text{sen } x$$

$$e^{-ix} = \cos x - i \text{sen } x$$

Estas ecuaciones establecen que las funciones seno y coseno pueden expresarse en términos de variaciones de la función exponencial compleja.

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\text{sen } x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

5.7.

6. Respuesta

6.1. Solución por de determinantes -

con MATLAB editor y metodo de determinantes.

Ejemplo

Ejemplo1

syms s t

R=1000

c=0.001

V=10*t^0

```

Vi=laplace(V)
I1=det([Vi -R;0 (R+(1/(c*s)))])/det([((2*R)+(1/(c*s))) -R;-R
(R+(1/(c*s)))]))
I1t=ilaplace(I1)
I2=det([((2*R)+(1/(c*s))) Vi;-R 0])/det([((2*R)+(1/(c*s))) -R;-R
(R+(1/(c*s)))]))
I2t=ilaplace(I2)
vo=I1*(R+1/(c*s))
vot=ilaplace(vo)
ezplot(vot)

```

ejemplo2

```

syms s t
R=1000
c=0.001
V=120*sin(377*t)
Vi=laplace(V)
I1=det([Vi -R;0 (R+(1/(c*s)))])/det([((2*R)+(1/(c*s))) -R;-R
(R+(1/(c*s)))]))
I1t=ilaplace(I1)
I2=det([((2*R)+(1/(c*s))) Vi;-R 0])/det([((2*R)+(1/(c*s))) -R;-R
(R+(1/(c*s)))]))
I2t=ilaplace(I2)
vo=I1*(R+1/(c*s))
vot=ilaplace(vo)
ezplot(vot)

```

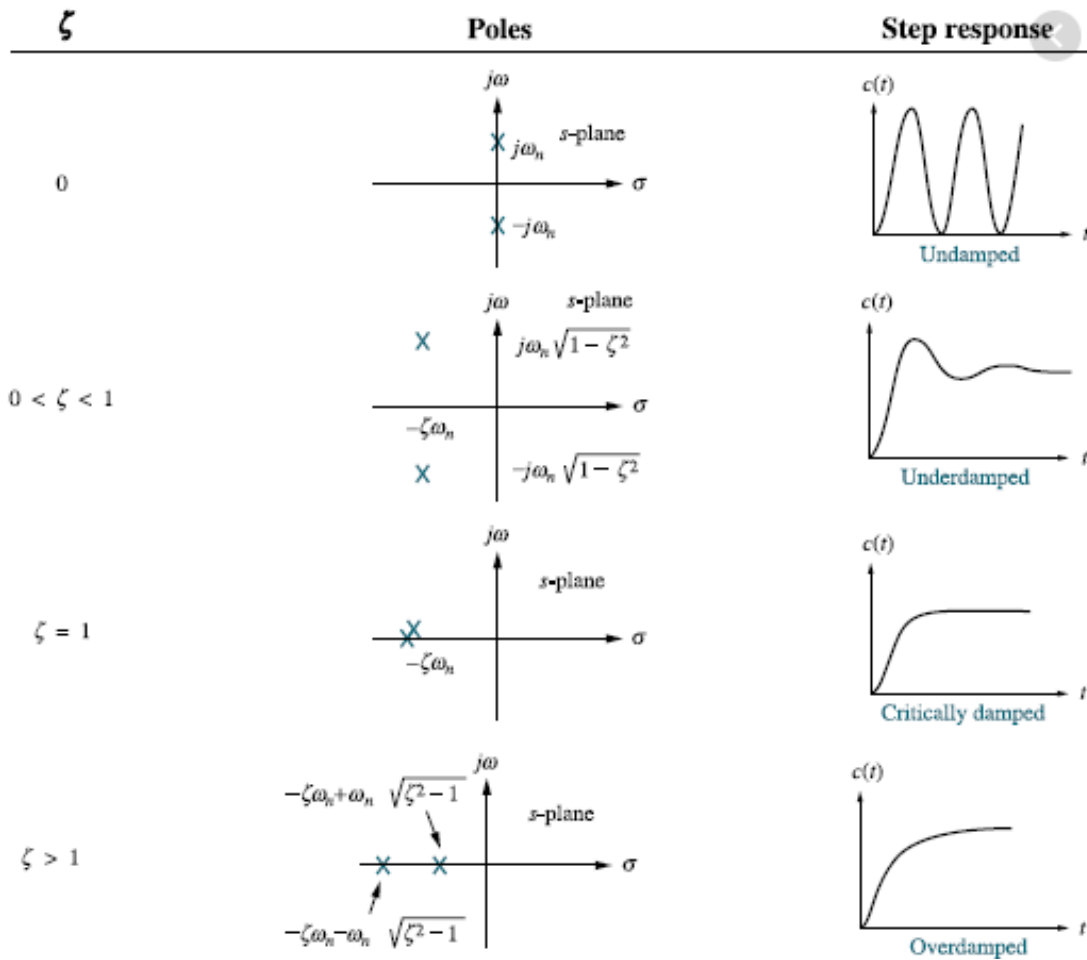
6.2. Modelo de respuesta en 1 orden

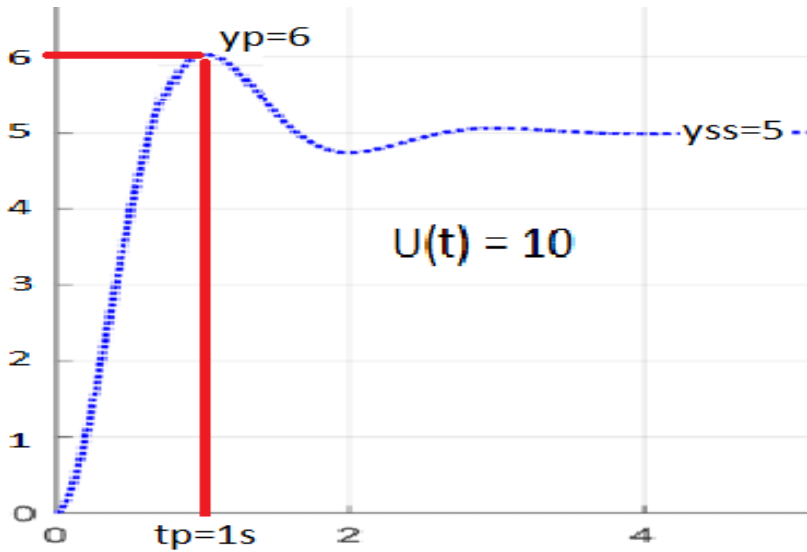
6.2.1. Ganancia

6.2.2.

6.3. Modelo de respuesta en 2 orden

6.3.1.

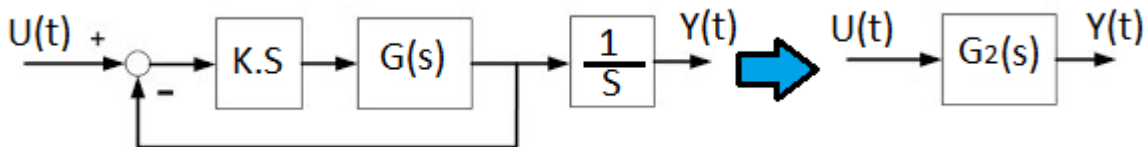




Encuentre: M_p (over shut), Angulo salida θ , ganancia K , ξ , σ , W_d , W_n , raíces (s_1, s_2), $G(s)$

Sea $G(s) = \frac{5}{(s-1-2j)(s-1+2j)}$

- i. Demuestre que el sistema $G(s)$ es inestable
- ii. Con la siguiente realimentación y bloques sugeridos, encuentre el rango de K que estabiliza el nuevo modelo $G_2(s)$.



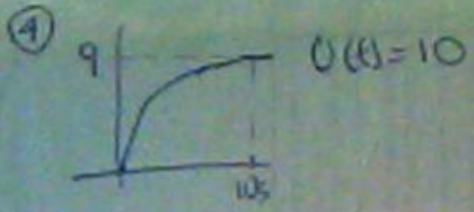
- iii. Qué valor de K hace que el error de posición en estado estacionario sea igual a 0.
- iv. Con el valor de k obtenido en el punto anterior, cual es el sobre pico (M_p over shut) obtenido y el tiempo de estabilización (2%).
- v. Encuentre el valor de k donde el sobre pico (M_p over shut) es igual a 0
- vi. Con el valor de k obtenido en el punto anterior, cual es el error de posición final y el tiempo de estabilización (2%).

Sea $G(s) = \frac{20}{s^3+9.s^2+26.s+24}$ $U(t) = 10$

- i. Demuestre que el sistema es estable
- ii. Encuentre el tiempo de estado estacionario y el valor de la salida final (Y_{ss}).

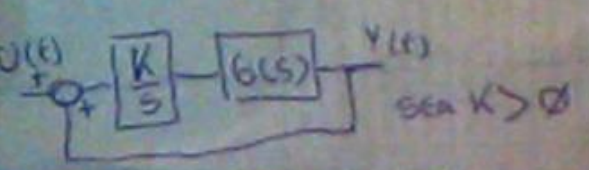
La siguiente grafica muestra la respuesta de un sistema a la entrada $U(t)=10$:

④

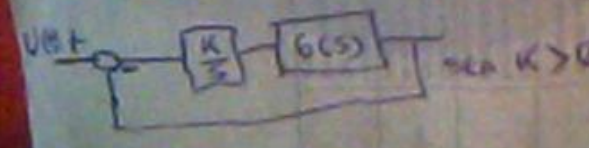


$U(t)=10$

a. $G(s) =$



b. DEMUESTRE QUE LA REALIMENTACION POSITIVA INESTABILIZA LA SEÑAL DE SALIDA O EL SISTEMA



c. ENWENTE RANGO DE K DONDE NO PRESENTA SOBREPICO

d. CALULE EL TIEMPO DE ESTABILIDAD (2%)

e. SI $K=1$ CALULE EL SOBREPICO

f. RESUELVE EL TIEMPO DE ESTABILIDAD (2%)

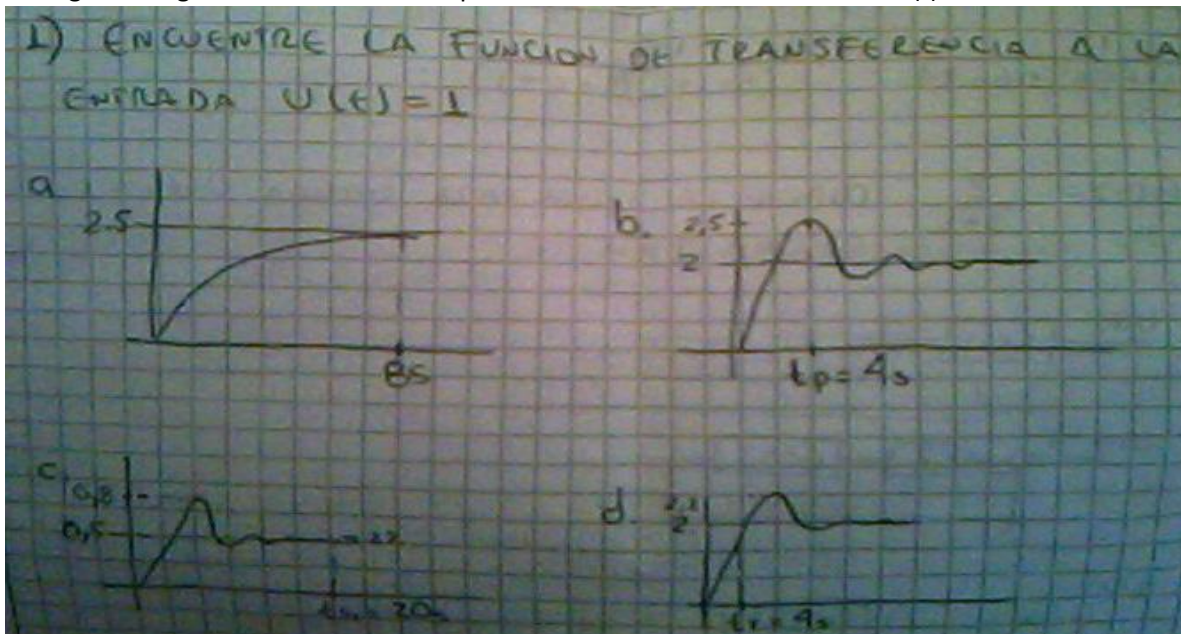
Estabilidad en $Y_{ss} = 2,5$ y $t_{ss} = 8s$

Estabilidad en $Y_{ss} = 2$; $Y_p=2,5$ y $t_p = 4s$

Estabilidad en $Y_{ss} = 0,5$; $Y_p=0,8$ y $t_{s2} = 20s$

Estabilidad en $Y_{ss} = 2$; $Y_p=2,1$ y $t_r = 4s$

Las siguientes graficas muestran la respuesta a la entrada escalón unitario $U(t)=1$



7. Aplique método de Hurwitz en cada $G(s)$ y evalúe la estabilidad.

Dado $U(t) = 1$ encuentre Y_{ss} para las señales estables

2) UTILICE METODO DE HURWITZ Y DIGA SI $G(s)$ ES O NO ESTABLE; SI ES ESTABLE DIGA Y_{ss} SI LA ENTRADA ES $U(t) = 1$

a. $\frac{1}{s-2}$ b. $\frac{4s+2}{3s^2+2s+1}$ c. $\frac{1}{(s+2)(s+1)(s+3)}$

d. $\frac{4}{(s+2)(s-1)(s+5)}$ e. $\frac{8}{(s+1)(s^2+2s+4)}$

f. $\frac{1}{(s^2+2s+4)(s+1)(s^2+3s+8)}$ g. $\frac{1}{(s+2)(s+1+j)(s+1-j)}$

h. $\frac{1}{(s-2)(s+1+j)(s+1-j)}$ i. $\frac{1}{s^4+3s^3-2s^2-s+1}$

j. $\frac{4}{(s+1+j)(s+1-j)}$

8. Verifique la estabilidad y tiempo de asentamiento al 2%

9. Dado $G(s)$ dibuje la señal de salida a la entrada $U(t) = 1$ en cada ítem.

3. VERIFIQUE ESTABILIDAD Y TIEMPO DE ASENTAMIENTO 2%

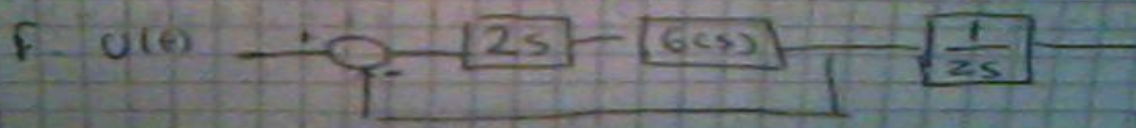
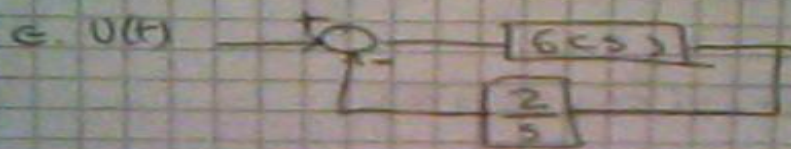
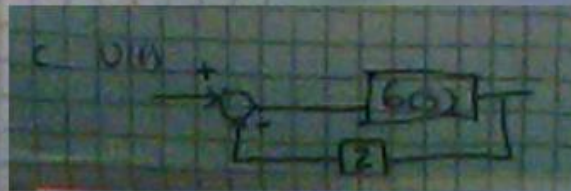
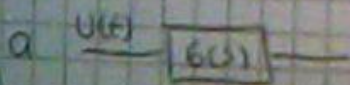
a. $\frac{1}{s^2 + 3s + 2}$

b. $\frac{1}{s^3 + 6s^2 + 11s + 6}$

c. $\frac{1}{s^3 + 3s^2 + 6s + 4}$

d. $\frac{1}{(s+1)(s+2-j)}$

4. $G(s) = \frac{2}{s+1}$ DIBUJE LA SALIDA PARA ENTRADA $U(t) = 1$ EN CADA ITEM.



10. Aplique acción de control dado $G(s)$ y $U(t)$ utilizando proporcionales para lograr

Error de posición = 0 y el tiempo de de estabilidad $T_{ss} = 2s$

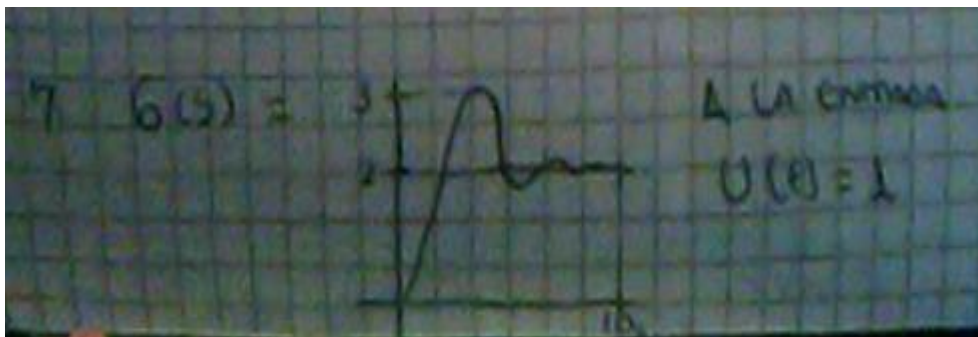
11. Para cada ítem dibuje la señal de salida con $U(t) = 1$

5 $G(s) = \frac{4}{2s+1}$ $U(t) = 1$

APLIQUE ACCION DE CONTROL PARA QUE ERROR DE POSICION SEA 0 y EL TIEMPO DE YSS SEA 2s.

6 $G(s) = \frac{8}{s^2 + 2s + 4}$ DIBUJE LA SEÑAL DE SALIDA CON $U(t) = 1$

12. Encuentre $G(s)$ $Y_{ss}=2$; $Y_p=3$; $t_s=10s$




13. Encuentre el rango de K que estabiliza la señal y especifique el valor de K que le hace responder más rápido de forma estable.

14. Dado $G(s)$ y $U(t) = 1$

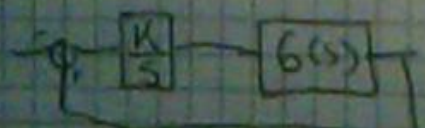
14.1. Haga que la señal se estabilice en 60s y dibuje la salida con valor de K elegido.

14.2. Encuentre k_1 y k_2 para los que la señal tiemne un $M_p=10\%$ y $Y_{ss} = U(t)$

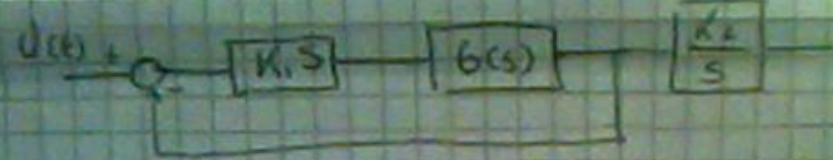
8 $G(s) = \frac{1}{s-4}$ ENCUENTRE EL VALOR DE K QUE ESTABILIZA LA SEÑAL (RANGO) Y ESPECIFIQUE CUAL ES EL VALOR VALIDO DE K QUE HACE RESPONDER "MAS RAPIDO"



9 $G(s) = \frac{4}{2s+1}$ $U(t) = 1$ HAGA QUE LA SEÑAL SE ESTABILICE EN 60s



DIBUJE LA SEÑAL RESULTANTE CON EL VALOR SELECCIONADO PARA K



ENCUENTRE K_1 Y K_2 PARA QUE $M_p = 10\%$ Y $Y_{ss} = U(t)$

14.3. Ejercicios propuestos

15. Representación virtual

- 15.1. Simulación en Simulink de Matlab
- 15.1.1. Punto de suma, ganancia e integración
- 15.1.2. Gráfica y análisis de señales con Simulink

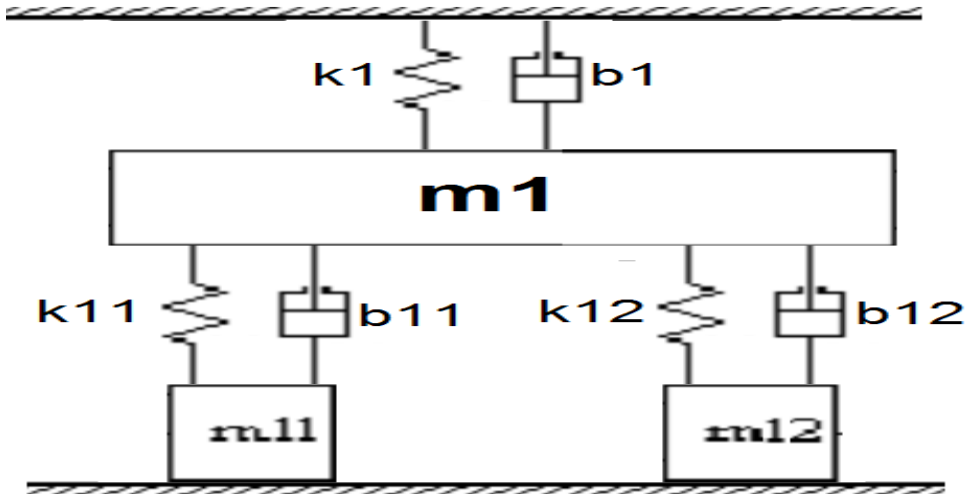
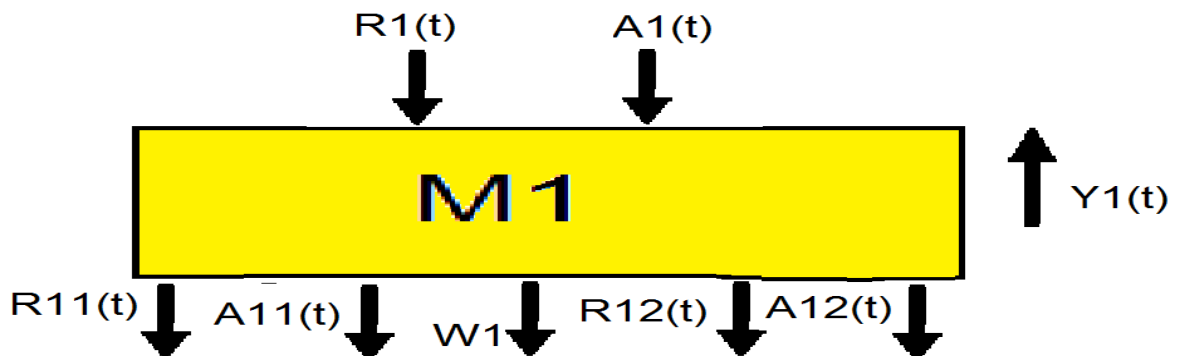
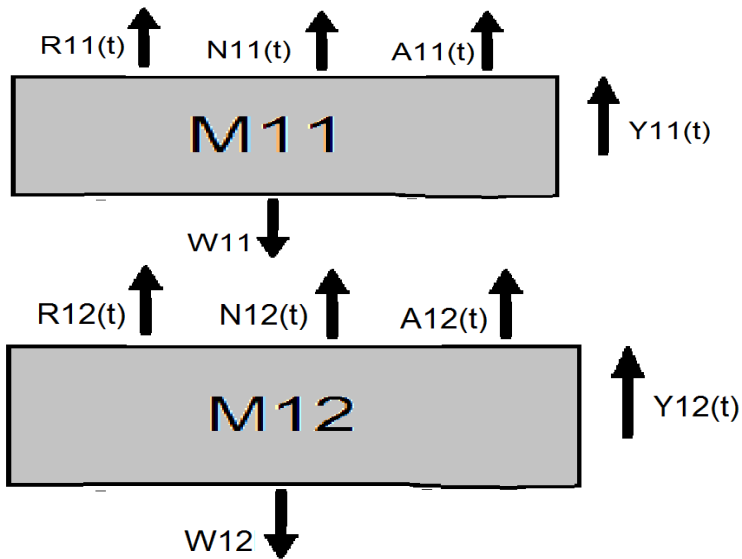


GRAFICO DE FUERZAS APLICADAS EN LAS MASAS

R = fuerza resorte A = fuerza amortiguador





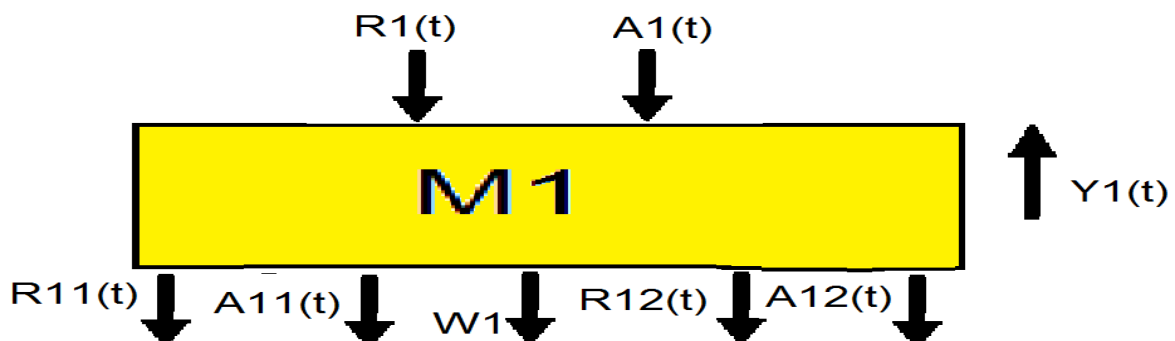
$$R1=y1*k1; \quad A1=v1*b1; \quad W1=m1*g; \quad W11=m11*g; \quad W12=m12*g;$$

$$R11=k11(y1-y11); \quad R12=k12(y1-y12)$$

$$A11=b11(v1-v11); \quad A12=b12(v1-v12)$$

ECUACIONES DINAMICAS

M1



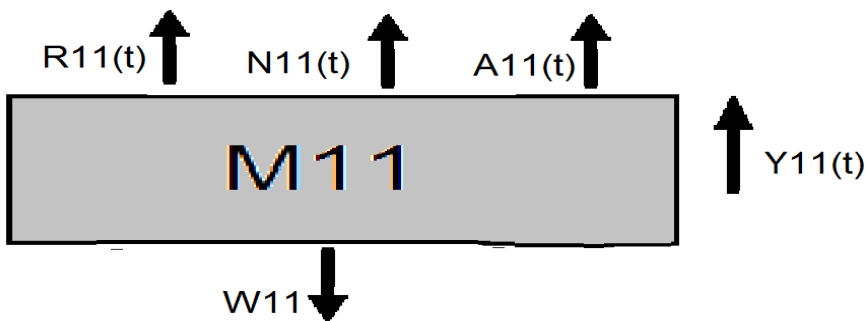
$$M1*a1 = - R11(t) - A11(t) - W1 - R12(t) - A12(t) - R1(t) - A1(t)$$

$$M1*a1 = - k11(y1-y11) - b11(v1-v11) - W1 - k12(y1-y12) - b12(v1-v12) - y1*k1 - v1*b1$$

Incognita = a1

$$a1 = (- k11(y1-y11) - b11(v1-v11) - W1 - k12(y1-y12) - b12(v1-v12) - y1*k1 - v1*b1)/M1$$

M11



$$M11 \cdot a11 = R11(t) + A11(t) - W11 + N11(t)$$

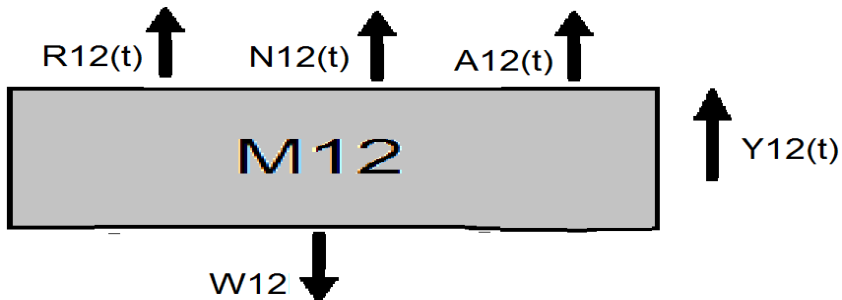
$$M11 \cdot a11 = k11(y1 - y11) + b11(v1 - v11) - W11 + N11$$

$$a11 = (k11(y1 - y11) + b11(v1 - v11) - W11 + N11) / M11$$

incognita N11(t)

$$N11 = M11 \cdot a11 - k11(y1 - y11) - b11(v1 - v11) + W11$$

M12



$$M12 \cdot a12 = R12(t) + A12(t) - W12 + N12(t)$$

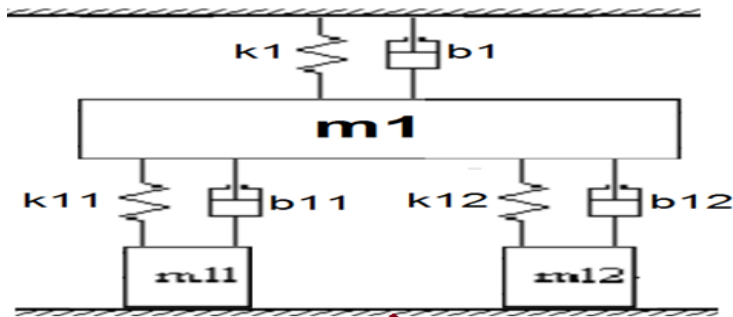
$$M12 \cdot a12 = k12(y1 - y12) + b12(v1 - v12) - W12 + N12$$

$$a12 = (k12(y1 - y12) + b12(v1 - v12) - W12 + N12) / M12$$

incognita N12(t)

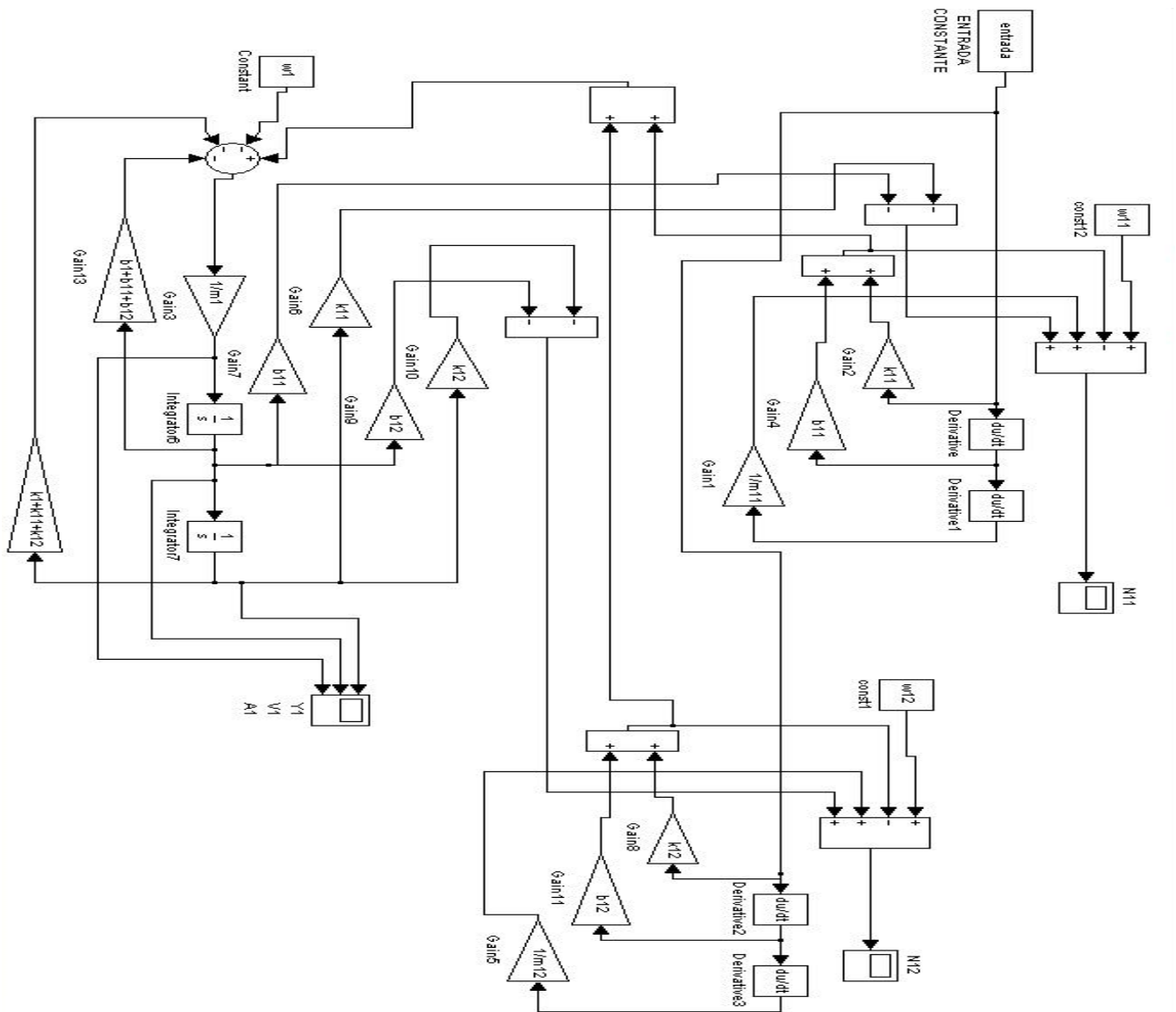
$$N12 = M12 \cdot a12 - k12(y1 - y12) - b11(v1 - v12) + W12$$

Las entradas Y11(x,t) a N11 y Y12(x,t) a N12 son un valor CONSTANTE al que se aplica un valor de 10 en los ejemplos.



entrada = 10 = y11 = y12

DIAGRAMAS DE BLOQUES EN SIMULINK

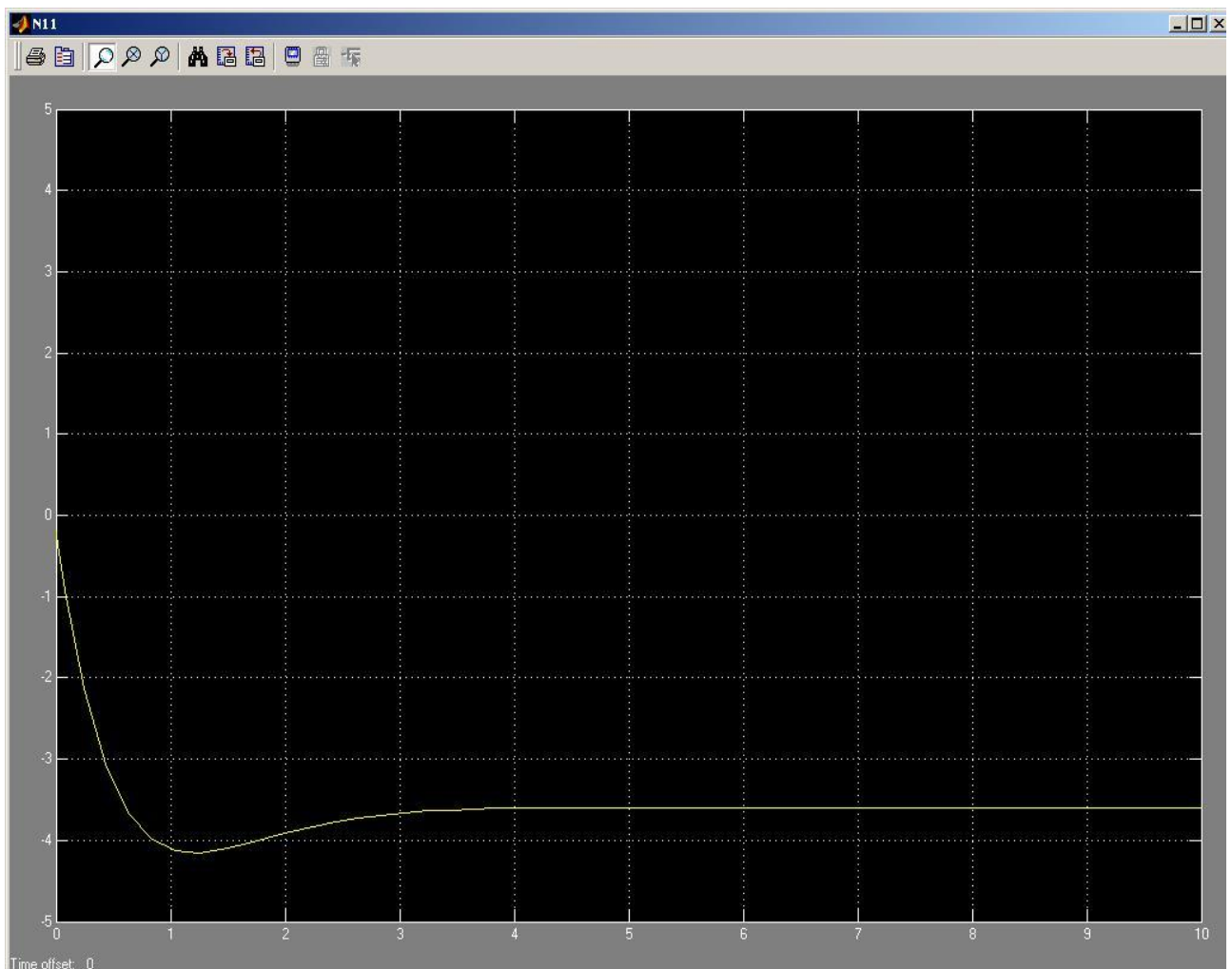


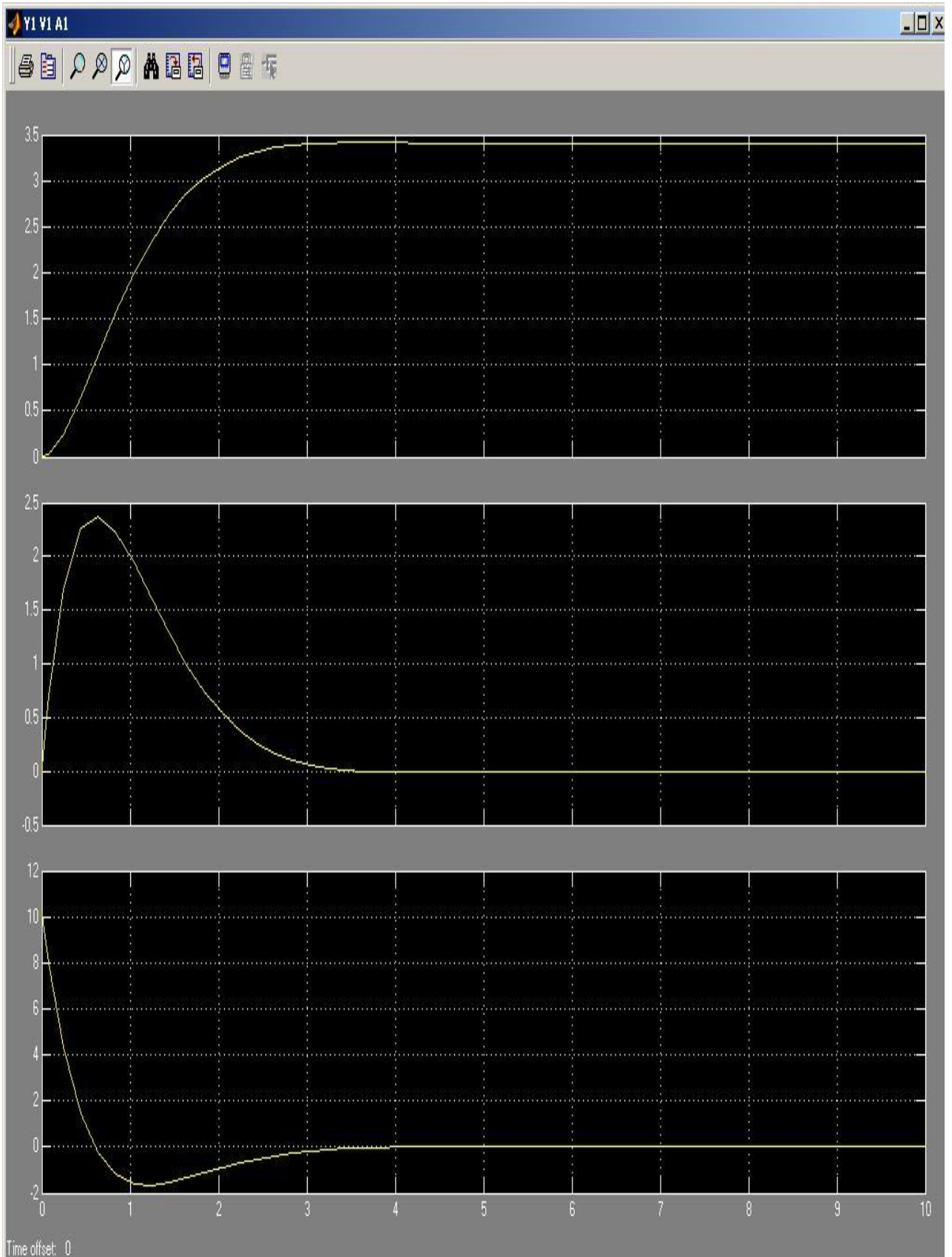
RESULTADOS GRAFICOS

EJEMPLO 1 (TODAS LAS VARIABLES = 1)

```
>> m1=1;  
m11=1;  
m12=1;  
k1=1;  
k11=1;  
k12=1;  
b1=1;  
b11=1;  
b12=1;  
w1=m1*9.8;  
w11=m11*9.8;  
w12=m12*9.8;  
entrada=10;  
>> |
```

Dado que $k_{11}=k_{12}$, $b_{11}=b_{12}$, $m_{11}=m_{12}$ entonces $N_{11}=N_{12}$

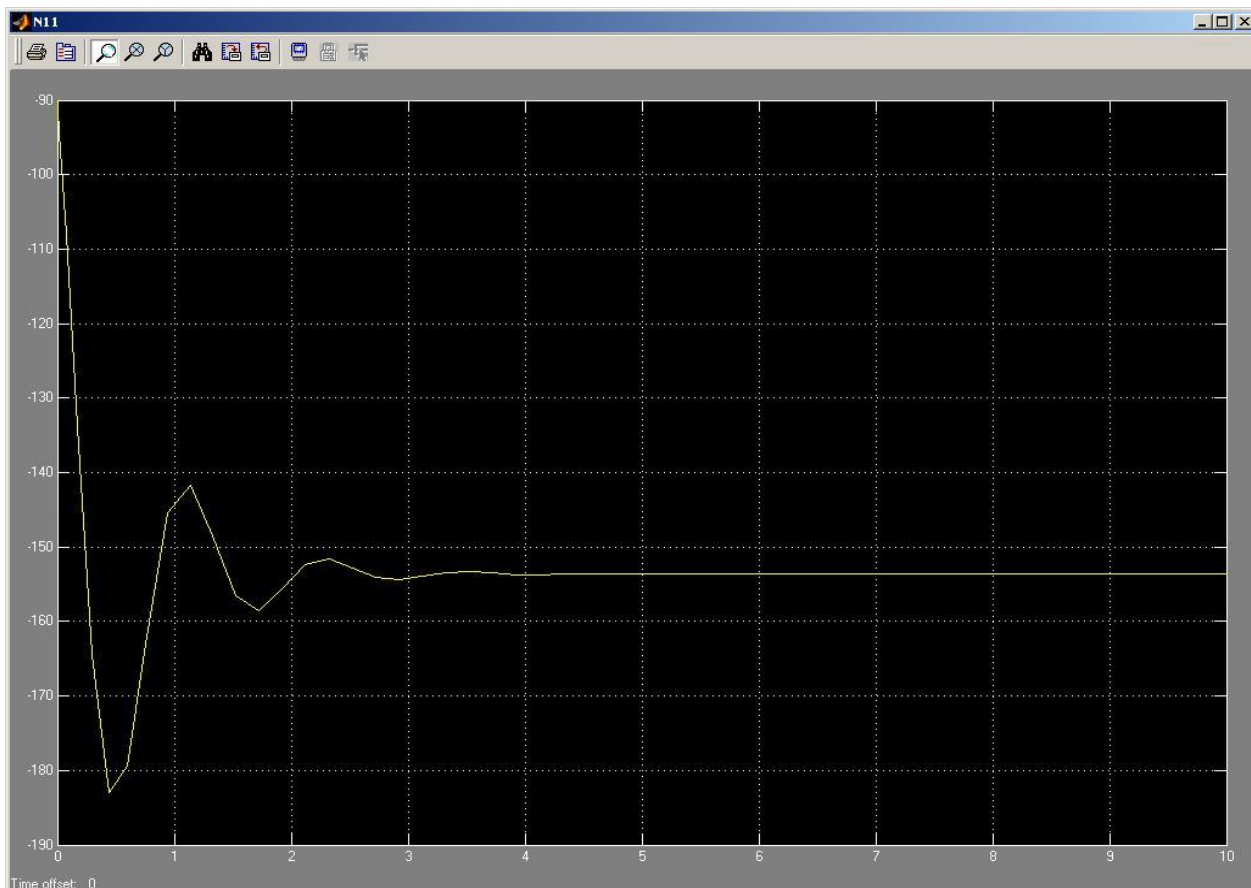


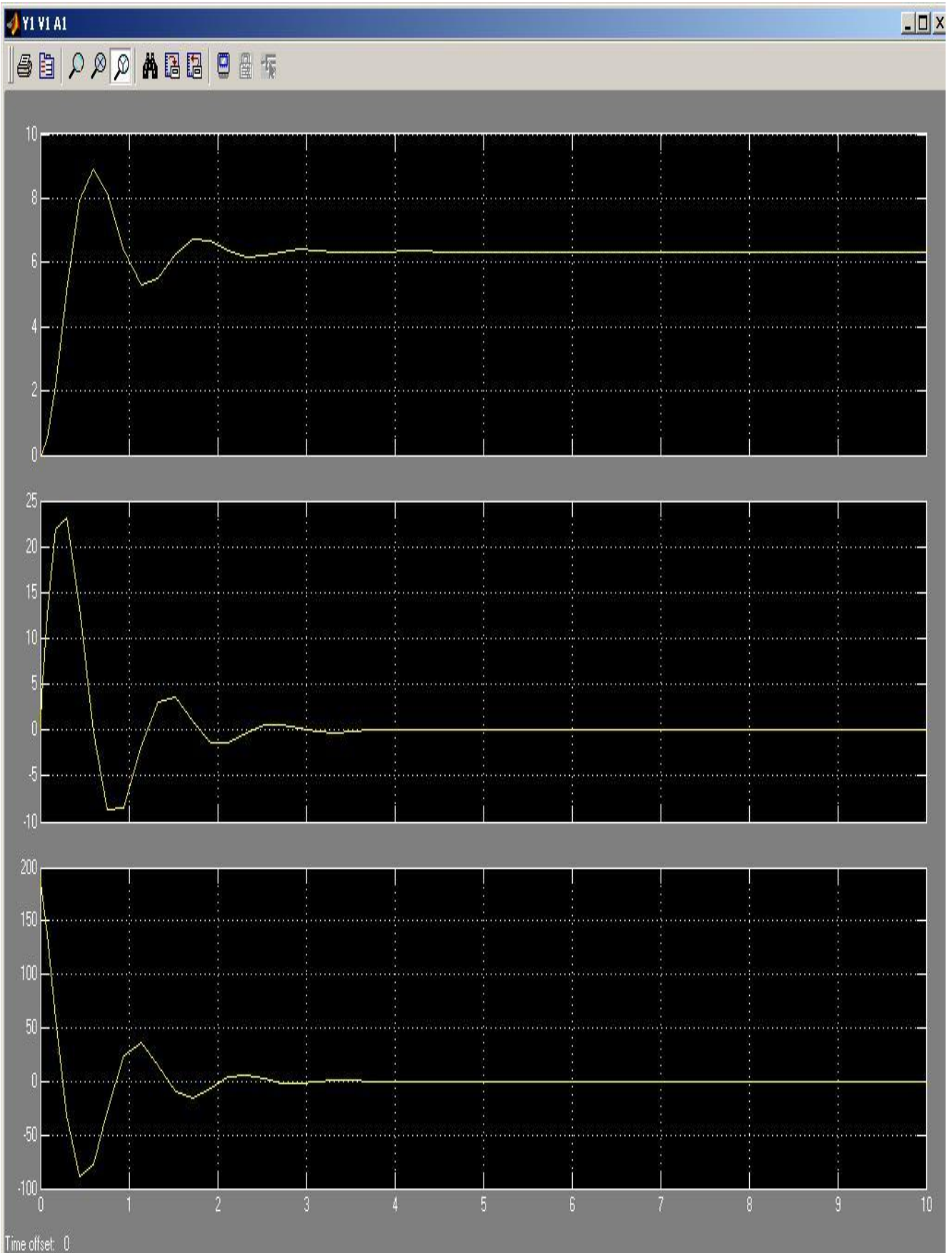


Se aprecian las gráficas de las normales $N_{11}=N_{12}$ y la gráfica de la posición Y_1 , velocidad V_1 y la aceleración A_1 , correspondientes a la masa M_1 . Los tiempos de estabilización son iguales en las 4 gráficas y es aproximadamente 4s. Tanto la velocidad como la aceleración retornan a 0 mostrando estabilidad en el sistema y la posición Y de la masa se desplaza ligeramente hacia arriba 3,5 unidades de desplazamiento positivo, sin presentar ninguna oscilación ni sobrepico. Existe una rápida aceleración inicial hacia una velocidad de 2,5 unidades de velocidad y luego la desaceleración más lenta hacia la velocidad 0.

EJEMPLO 2 En este ejemplo las constantes de resorte se aumentan 10 veces

```
y> m1=1;  
m11=1;  
m12=1;  
k1=10;  
k11=10;  
k12=10;  
b1=1;  
b11=1;  
b12=1;  
w1=m1*9.8  
w11=m11*9.8  
w12=m12*9.8  
entrada=10
```

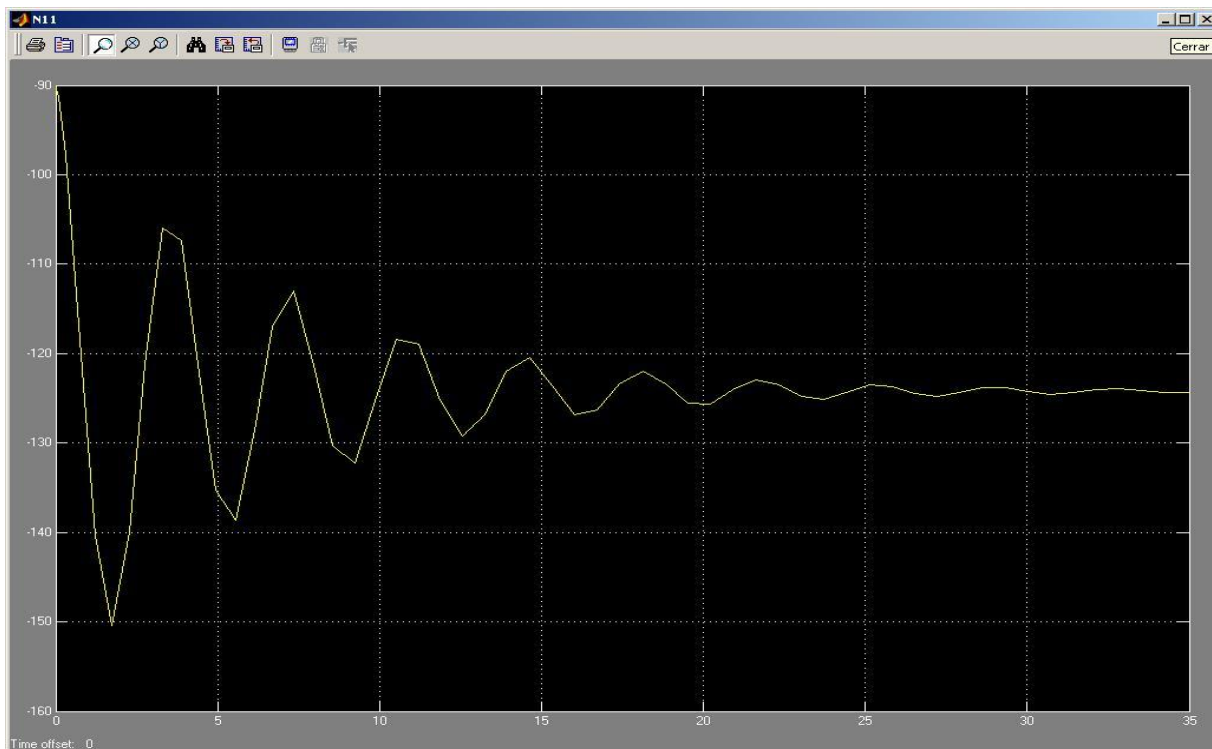


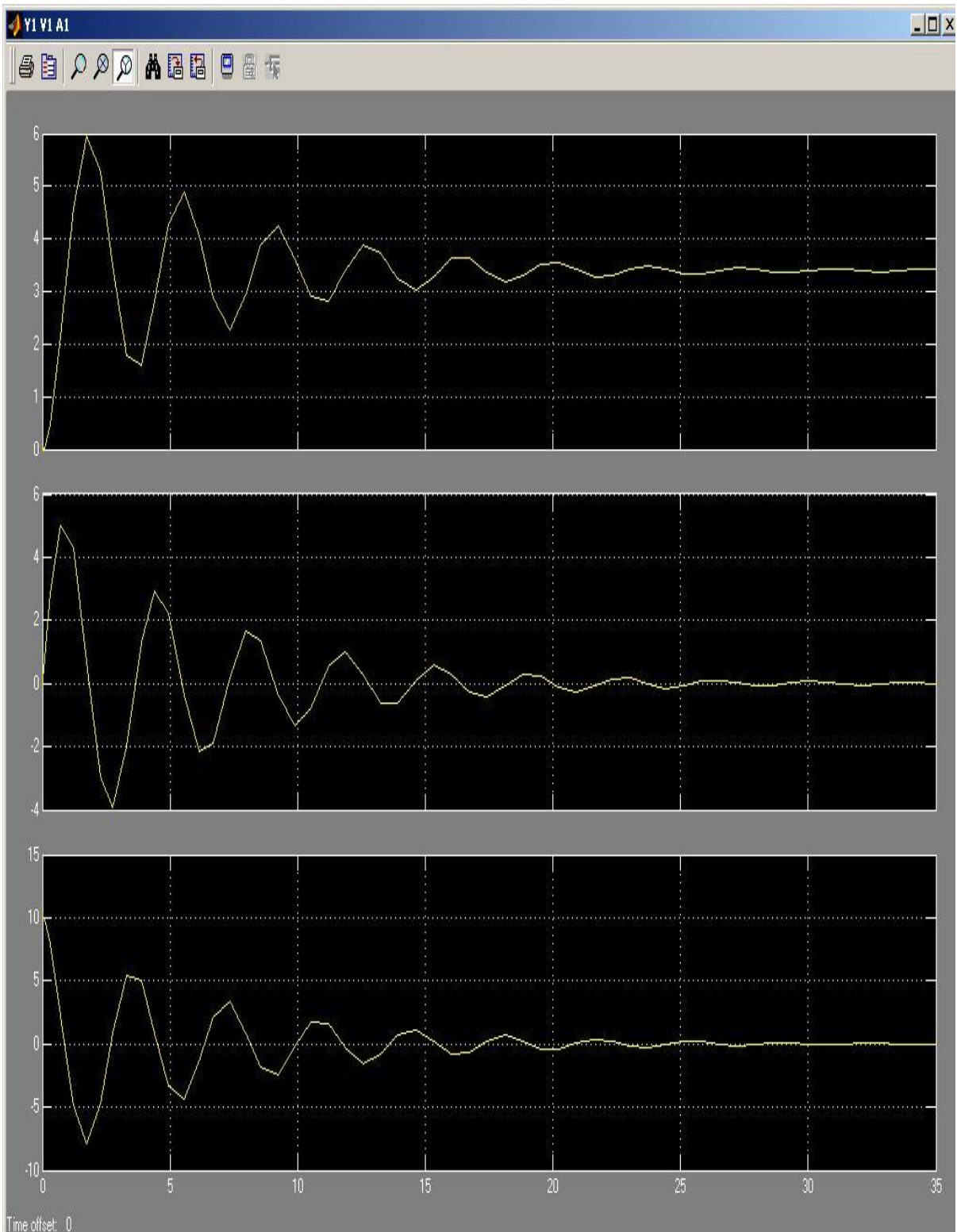


Al aumentar la constante de resortes, las fuerzas de reacción aumentan logrando un punto de estabilización más alto en la masa de alrededor de 6 unidades de desplazamiento. Los tiempos de respuesta son similares al ejemplo 1 siendo de 4s pero en este caso se aprecia oscilación en la respuesta de posición alcanzando un pico de 9 unidades de desplazamiento. Por el lado de la velocidad y la aceleración, son más elevadas que en el ejemplo 1 pero el retorno a 0 de las mismas muestra que el sistema llega al reposo. El valor final de la normal $N_{11}=N_{12}$ es mucho más elevado esto debido a las mayores fuerzas que aparecen en el sistema.

EJEMPLO 3 En este ejemplo aumentamos la masa1, 10 veces dejando las demás variables como en el ejemplo 2

```
>> m1=10;  
m11=1;  
m12=1;  
k1=10;  
k11=10;  
k12=10;  
b1=1;  
b11=1;  
b12=1;  
w1=m1*9.8  
w11=m11*9.8  
w12=m12*9.8  
entrada=10
```





En las gráficas se puede apreciar el aumento en la masa superior produjo un cambio significativo en la respuesta transitoria ya que se logra ver mucha más oscilación y el

tiempo de estabilización es también mucho más alto, alrededor de 30s lo que es casi 7 o 8 veces el tiempo alcanzado en los ejemplos 1 y 2.

Al aumentar la masa, los valores pico de posición, velocidad y aceleración, como era de esperarse, son más bajos que en el ejemplo 2.

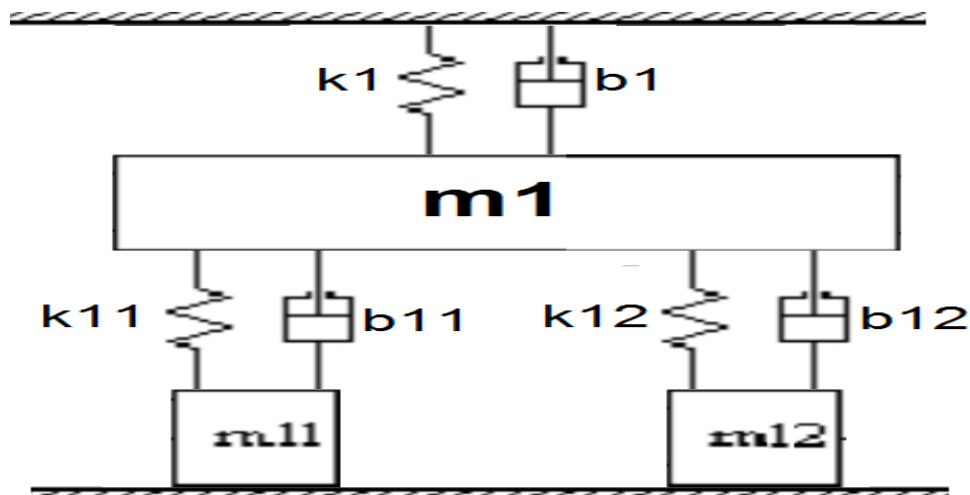
El valor final de posición al parecer es proporcional entre amortiguamiento y masa ya que se desplazó 3,5 unidades al igual que el ejemplo 1 donde masa y resorte dimos un valor relativamente igual.

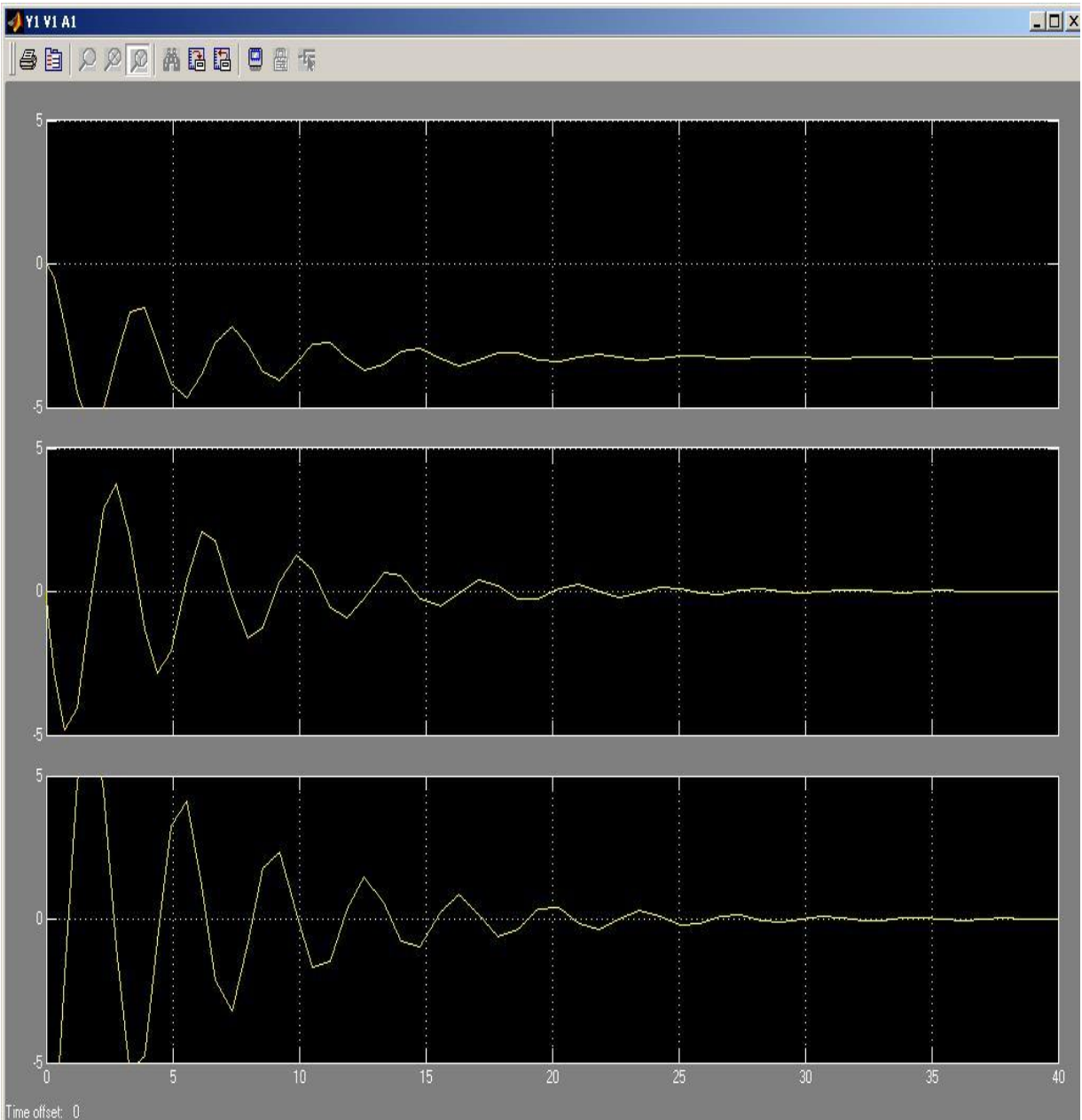
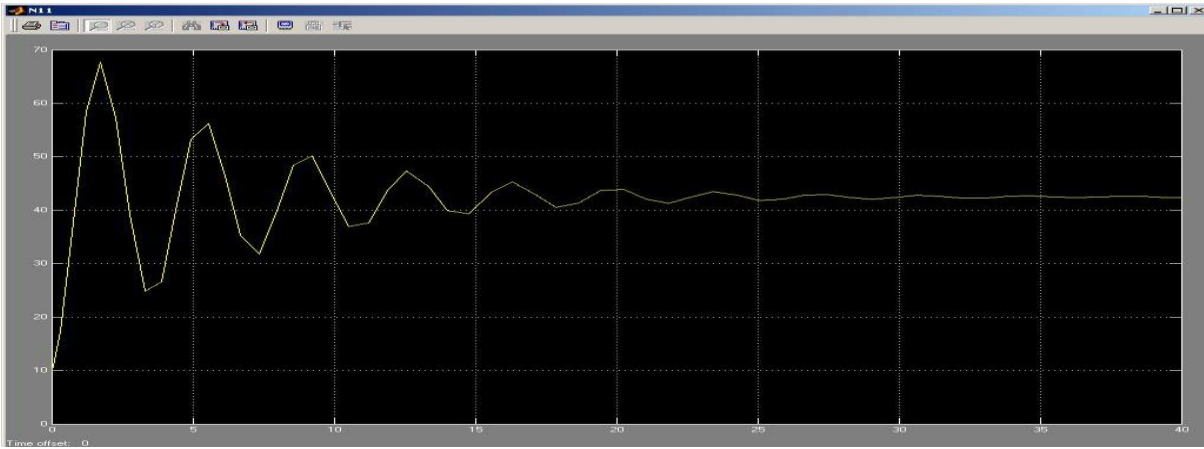
Finalmente podemos concluir: que modelar un sistema con matlab nos permite apreciar el cambio en el comportamiento del mismo, y fácilmente podemos ajustar variables resistivas y de amortiguamiento que den tipos de respuesta.

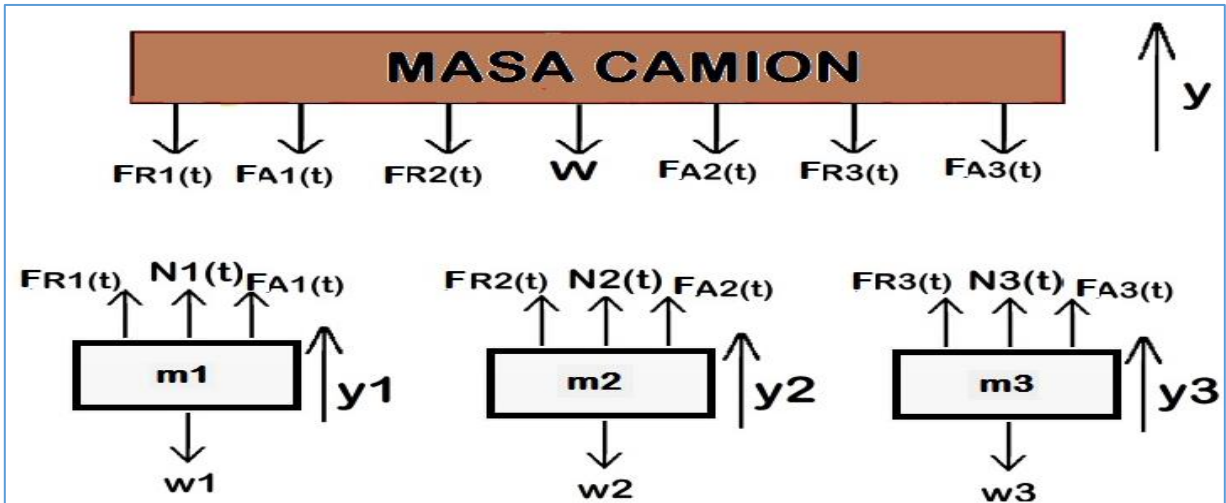
Como anexo final se presenta el modelo inicial en donde la entrada es igual a 0. La masa reposa en una posición menor a la posición 0 de referencia y la normal aparece positiva tal como lo plantean las ecuaciones.

Se utilizan los valores del ejemplo 3 pero en este caso la entrada constante es igual a 0.

```
>> m1=10;  
m11=1;  
m12=1;  
k1=10;  
k11=10;  
k12=10;  
b1=1;  
b11=1;  
b12=1;  
w1=m1*9.8  
w11=m11*9.8  
w12=m12*9.8  
entrada=0
```







FR = FUERZA DE RESORTE FA = FUERZA DE AMORTIGUADOR W = PESO N = NORMAL

(M) MASA DEL CAMION

$$M \cdot a = -FR1(t) - FA1(t) - FR2(t) - FA2(t) - FR3(t) - FA3(t) - W_{camion}$$

$$M \cdot a = -k(y-y_1) - b(v-v_1) - k(y-y_2) - b(v-v_2) - k(y-y_3) - b(v-v_3) - W$$

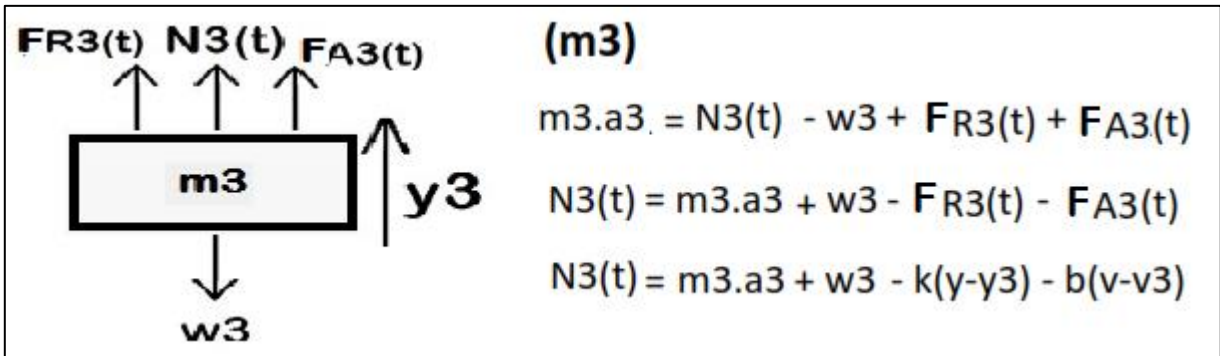
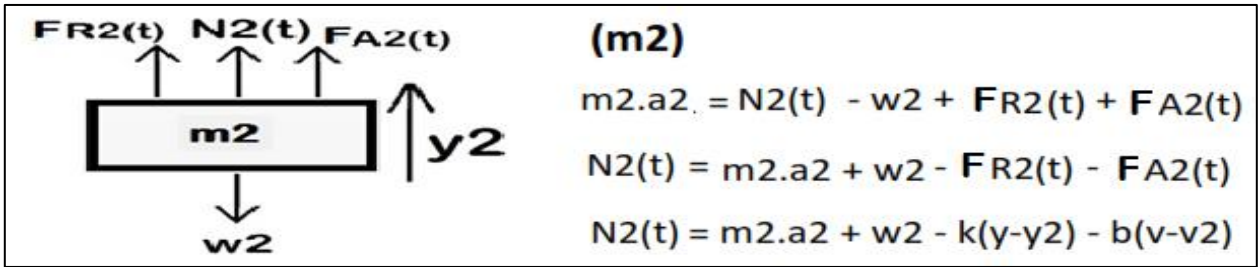
$$a = \frac{1}{M} (-3 \cdot k \cdot y - 3 \cdot b \cdot v + k \cdot y_1 + k \cdot y_2 + k \cdot y_3 + b \cdot v_1 + b \cdot v_2 + b \cdot v_3 - W)$$

(m1)

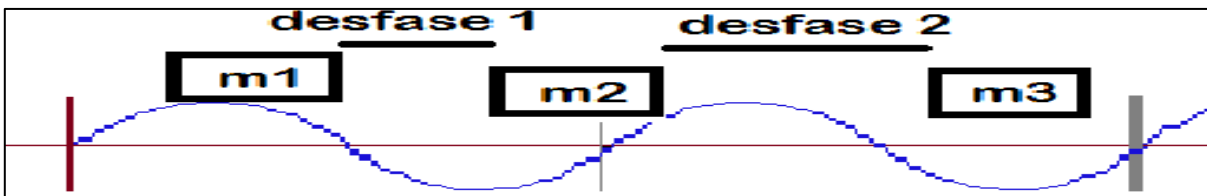
$$m_1 \cdot a_1 = N_1(t) - w_1 + FR_1(t) + FA_1(t)$$

$$N_1(t) = m_1 \cdot a_1 + w_1 - FR_1(t) - FA_1(t)$$

$$N_1(t) = m_1 \cdot a_1 + w_1 - k(y-y_1) - b(v-v_1)$$

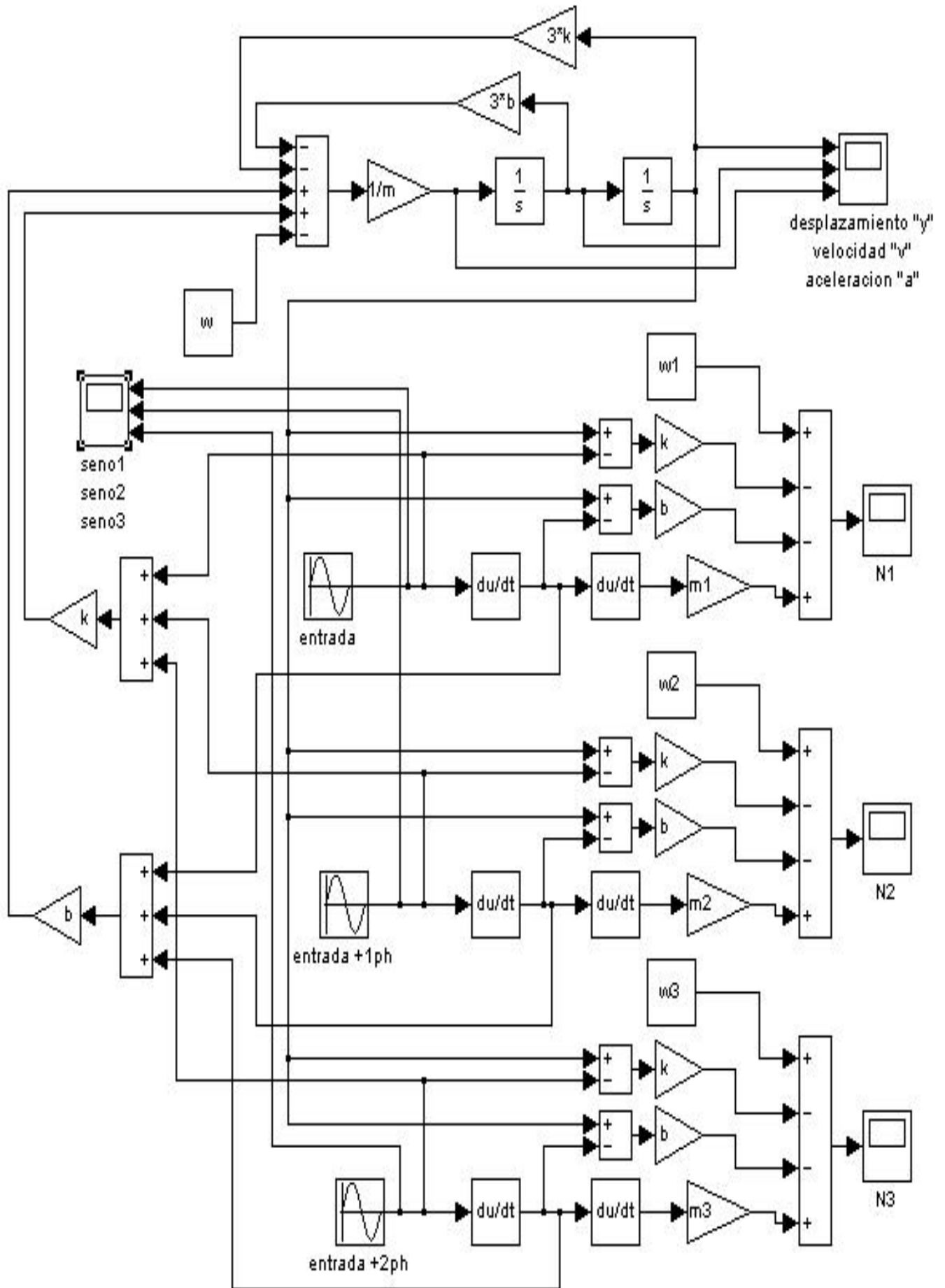


LA ENTRADA ES SENOSOIDAL. ES DECIR LOS DESPLAZAMIENTOS $Y1(t)$, $Y2(t)$ Y $Y3(t)$ SON DEL TIPO "A sin (wt + desfase)" Pero entre ellos existe un desfase



La señal sinusoidal que siente cada llanta está desfasada una de otra según la distancia $x1$ y $x2$ entre ejes. En la simulación se establece una variable ph que dictamina la fase y asumimos $x1=x2$ (distancia entre ejes). Adicionalmente la variable fr se establece para cambiar la frecuencia de la señal de entrada seno. La amplitud de la señal aplicada es 1.

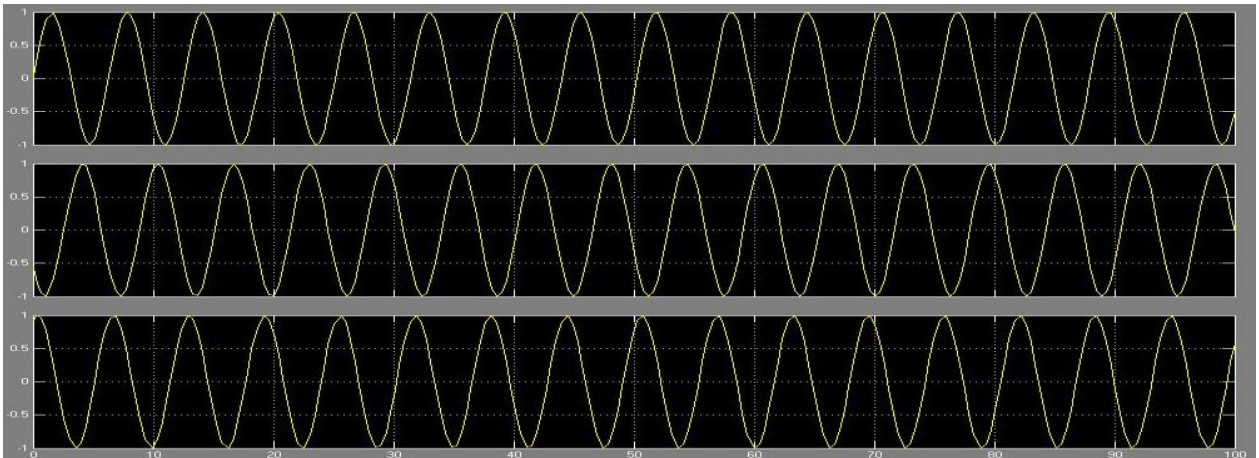
Diagramas de bloques MATLAB



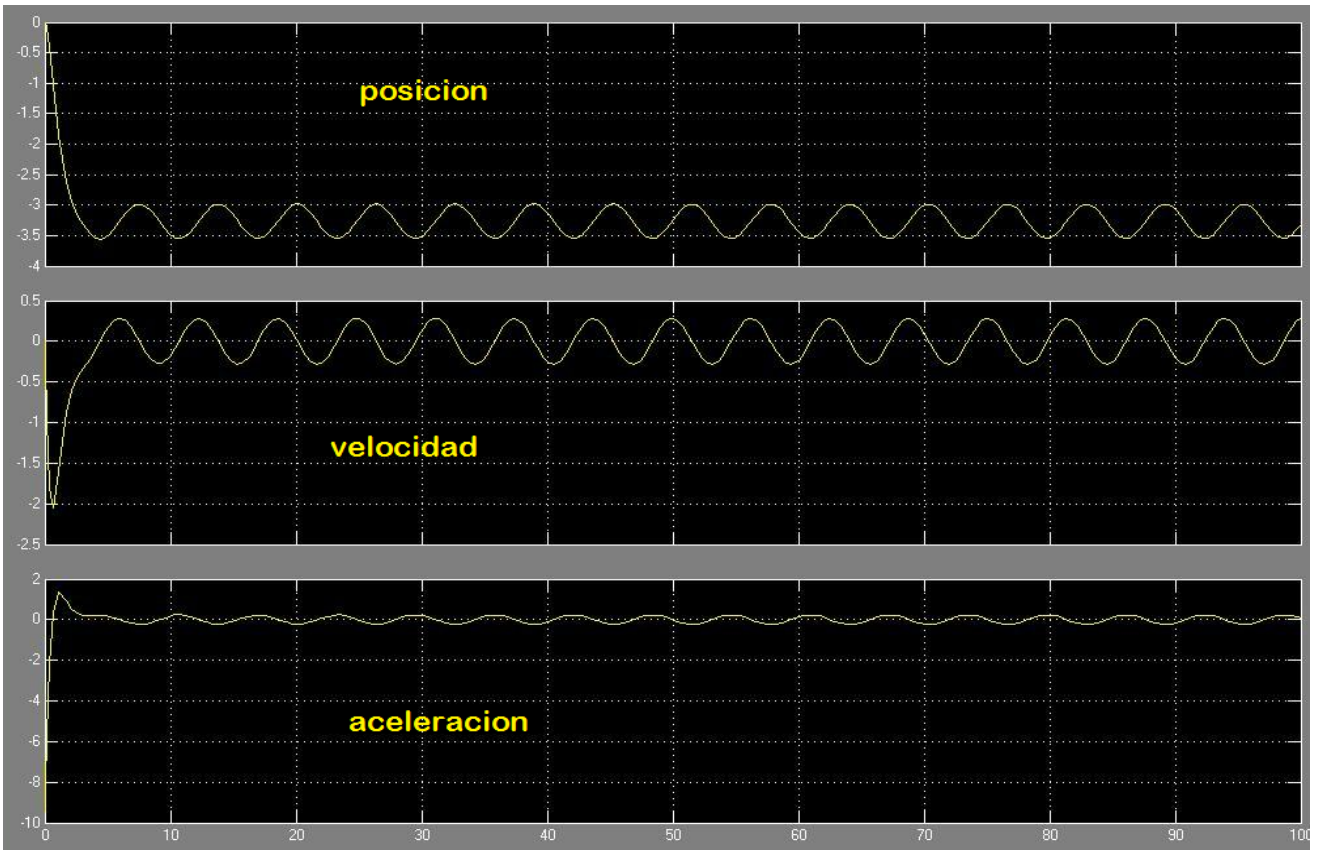
Dando valor a las variables se pueden revisar graficos de resultado

```
m=1; k=1; w2=m2*9.8;  
m1=1; b=1; w3=m3*9.8;  
m2=1; w=m*9.8; fr=1;  
m3=1; w1=m1*9.8; ph=10;
```

Con estos valores podemos ver el desfase de señal en las llantas



Con estos valores la masa responde de la siguiente manera

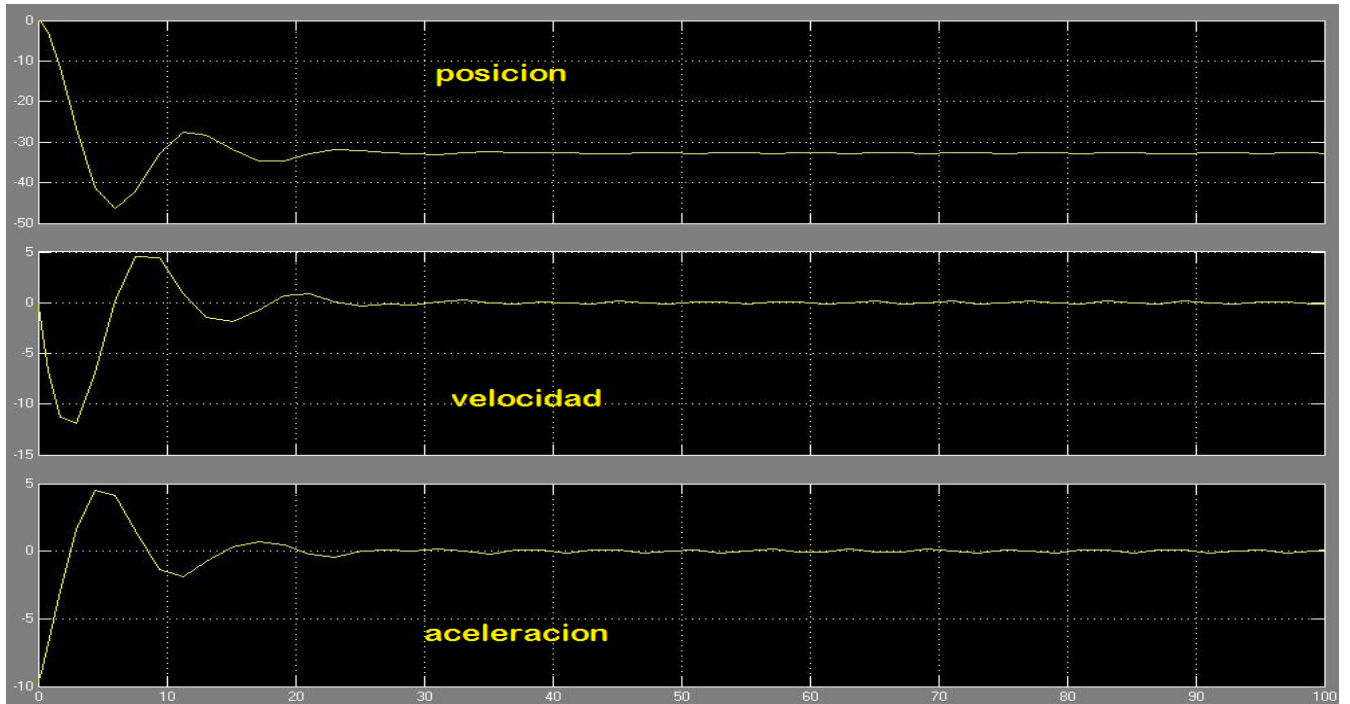


Se asume que la masa no tiene el mismo peso de las llantas por lo que aumentamos la

```
m=10; k=1; w2=m2*9.8;
m1=1; b=1; w3=m3*9.8;
m2=1; w=m*9.8; fr=1;
m3=1; w1=m1*9.8; ph=10;
```

masa a 10

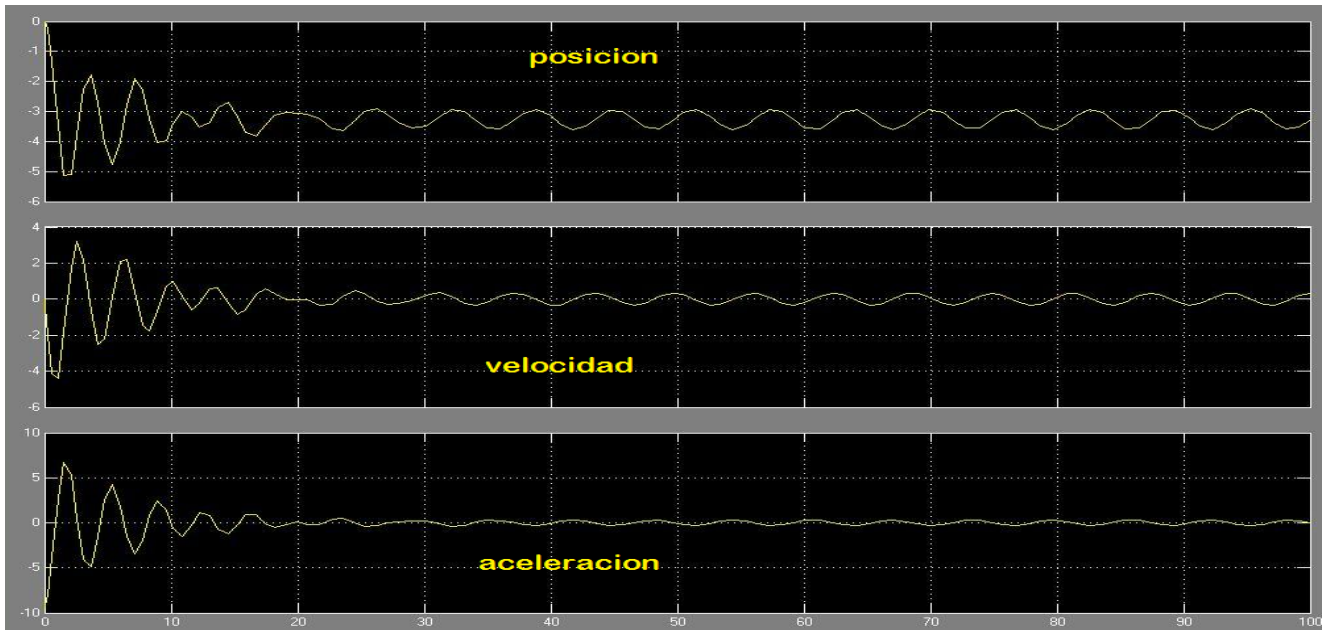
Y con estos valores...



El aumento de masa hace que la posición cambie mucho más.

Ahora si aumentamos la constante de resorte a 100

```
m=10; k=100; w2=m2*9.8;
m1=1; b=1; w3=m3*9.8;
m2=1; w=m*9.8; fr=1;
m3=1; w1=m1*9.8; ph=10;
```



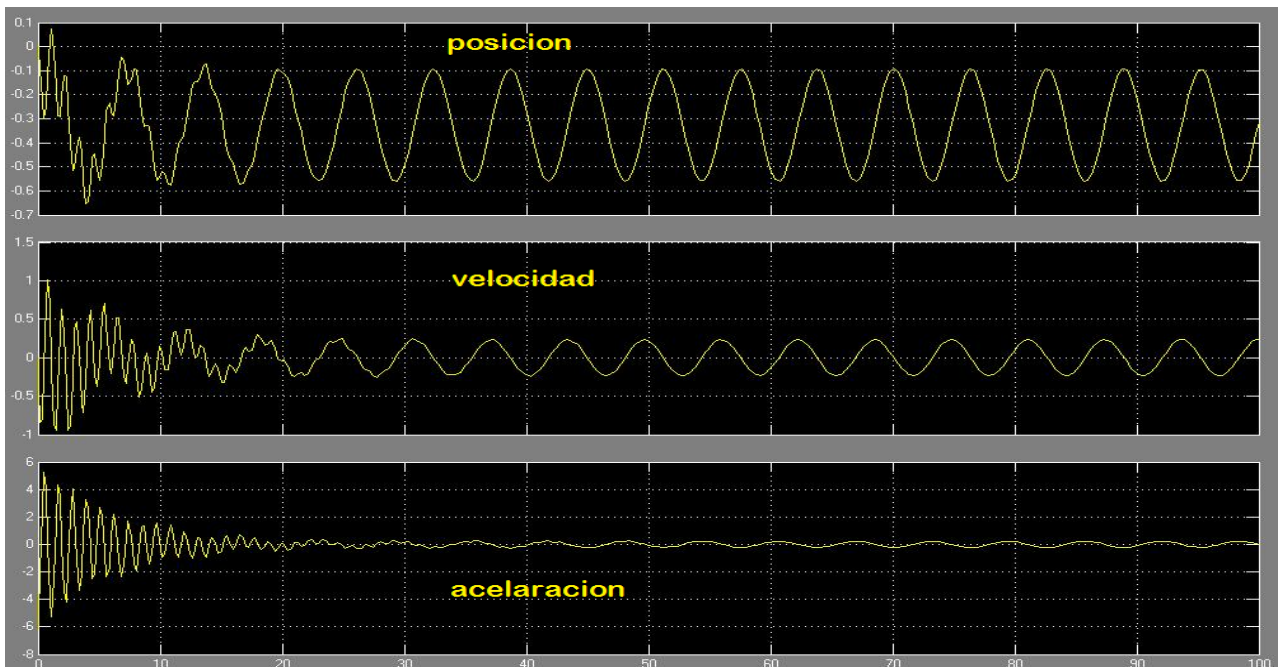
Se contrarresta el efecto de la carga y nuevamente la oscilación es de 0,5 pero en el tramo inicial hay un efecto de variación que no ocurrió en el primer caso

Si varía aún más la constante elástica a 100

```

m=10;    k=100;    w2=m2*9.8;
m1=1;    b=1;      w3=m3*9.8;
m2=1;    w=m*9.8;  fr=1;
m3=1;    w1=m1*9.8; ph=10;

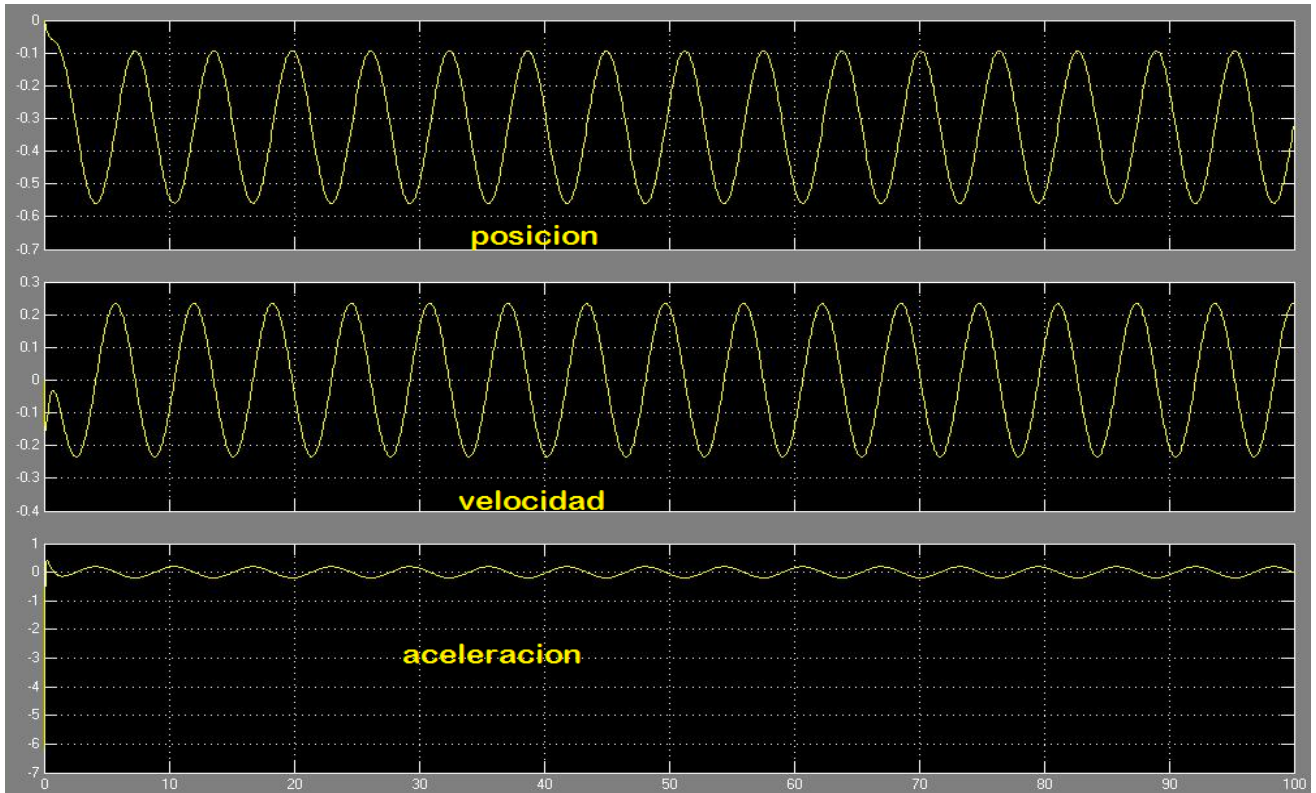
```



La masa prácticamente no cambia su posición pero el tramo inicial muy variable.

Al realizar un cambio en amortiguadores

```
m=10;    k=100;    w2=m2*9.8;  
m1=1;    b=50;    w3=m3*9.8;  
m2=1;    w=m*9.8;  fr=1;  
m3=1;    w1=m1*9.8; ph=10;
```



El movimiento de la masa parece más constante y se contrarresta el efecto del resorte pero la amplitud de la variación crece un poco.

Biarticulado Transmilenio con acordeón en medio

Las entradas del sistema son $y_{11}, y_{12}, y_{21}, y_{31}$ de manera que en las ecuaciones diferenciales para cada desplazamiento de las masas $m_{11}, m_{12}, m_{21}, m_{31}$, las incógnitas serán $N_{11}, N_{13}, N_{21}, N_{31}$

Llanta m_{11}

$$a_{11}m_{11} = N_{11} - W_{11} - k_{11}(y_{11} - y_1) - b_{11}(v_{11} - v_1)$$

$$N_{11} = a_{11}m_{11} + W_{11} + k_{11}(y_{11} - y_1) + b_{11}(v_{11} - v_1)$$

$$N_{11} = a_{11}m_{11} + W_{11} - k_{11}(y_1 - y_{11}) - b_{11}(v_1 - v_{11})$$

Llanta m_{12}

$$a_{12}m_{12} = N_{12} - W_{12} - k_{12}(y_{12} - y_1) - b_{12}(v_{12} - v_1)$$

$$N_{12} = a_{12}m_{12} + W_{12} + k_{12}(y_{12} - y_1) + b_{12}(v_{12} - v_1)$$

$$N_{12} = a_{12}m_{12} + W_{12} - k_{12}(y_1 - y_{12}) - b_{12}(v_1 - v_{12})$$

Llanta m_{21}

$$a_{21}m_{21} = N_{21} - W_{21} - k_{21}(y_{21} - y_2) - b_{21}(v_{21} - v_2)$$

$$N_{21} = a_{21}m_{21} + W_{21} + k_{21}(y_{21} - y_2) + b_{21}(v_{21} - v_2)$$

$$N_{21} = a_{21}m_{21} + W_{21} - k_{21}(y_2 - y_{21}) - b_{21}(v_2 - v_{21})$$

Llanta m_{31}

$$a_{31}m_{31} = N_{31} - W_{31} - k_{31}(y_{31} - y_3) - b_{31}(v_{31} - v_3)$$

$$N_{31} = a_{31}m_{31} + W_{31} + k_{31}(y_{31} - y_3) + b_{31}(v_{31} - v_3)$$

$$N_{31} = a_{31}m_{31} + W_{31} - k_{31}(y_3 - y_{31}) - b_{31}(v_3 - v_{31})$$

Para los desplazamientos de las masas m_1, m_2, m_3 , las incógnitas serán y_1, y_2, y_3 por lo que despejamos a_1, a_2, a_3 .

Vagón m_1

$$a_1 m_1 = -W_1 - k_{11}(y_1 - y_{11}) - b_{11}(v_1 - v_{11}) - k_{11}(y_1 - y_{12}) - b_{11}(v_1 - v_{12}) - k1(\Delta Y_{(1-2)}) - b1(\Delta V_{(1-2)})$$

Vagón m_2

$$a_2 m_2 = -W_2 - k_{21}(y_2 - y_{21}) - b_{21}(v_2 - v_{21}) - k1(\Delta Y_{(2-1)}) - b1(\Delta V_{(2-1)}) - k2(\Delta Y_{(2-3)}) - b2(\Delta V_{(2-3)})$$

Vagón m_3

$$a_3 m_3 = -W_3 - k_{31}(y_3 - y_{31}) - b_{31}(v_3 - v_{31}) - k2(\Delta Y_{(3-2)}) - b2(\Delta V_{(3-2)})$$

$$\Delta Y_{(1-2)} = -\Delta Y_{(2-1)}; \Delta V_{(1-2)} = -\Delta V_{(2-1)}; \Delta Y_{(3-2)} = -\Delta Y_{(2-3)}; \Delta V_{(3-2)} = -\Delta V_{(2-3)}$$

Encontramos los factores ΔY y ΔV que son el desplazamiento y velocidad diferencial en la unión entre carrocerías donde es preciso establecer que: La elongación del resorte entre vagones será pues la hipotenusa final menos la distancia inicial del resorte y la velocidad la diferencia de las velocidades en los extremos del amortiguador.

$$\Delta Y_{(a-b)} = \sqrt{(X_{ab})^2 + (Y_a - Y_b)^2} - (X_{ab})$$

$$\text{La diferencia de velocidades está dada por } \Delta V_{(a-b)} = (V_a - V_b)$$

$$\Delta Y_{(2-1)} = \sqrt{(X_{21})^2 + (Y_2 - Y_1)^2} - (X_{21})$$

$$\Delta Y_{(3-2)} = \sqrt{(X_{32})^2 + (Y_3 - Y_2)^2} - (X_{32})$$

$$\Delta V_{(2-1)} = (V_2 - V_1)$$

$$\Delta V_{(3-2)} = (V_3 - V_2)$$

Vagón m_1

$$a_1 = \frac{1}{m_1} [-W_1 - k_{11}(y_1 - y_{11}) - b_{11}(v_1 - v_{11}) - k_{11}(y_1 - y_{12}) \\ - b_{11}(v_1 - v_{12}) + k1(\Delta Y_{(2-1)}) + b1(\Delta V_{(2-1)})]$$

Vagón m_2

$$a_2 = \frac{1}{m_2} [-W_2 - k_{21}(y_2 - y_{21}) - b_{21}(v_2 - v_{21}) - k1(\Delta Y_{(2-1)}) \\ - b1(\Delta V_{(2-1)}) + k2(\Delta Y_{(3-2)}) + b2(\Delta V_{(3-2)})]$$

Vagón m_3

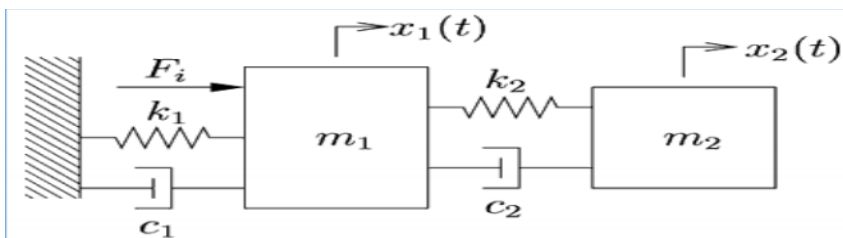
$$a_3 = \frac{1}{m_3} [-W_3 - k_{31}(y_3 - y_{31}) - b_{31}(v_3 - v_{31}) - k2(\Delta Y_{(3-2)}) \\ - b2(\Delta V_{(3-2)})]$$

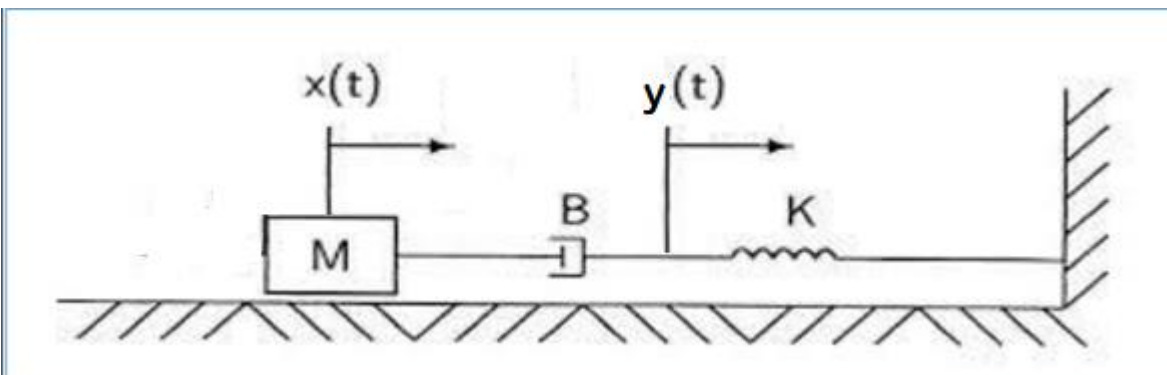
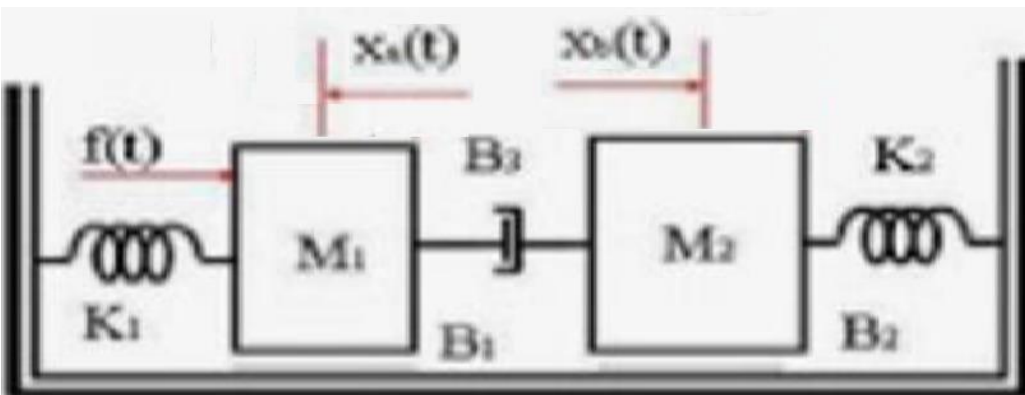
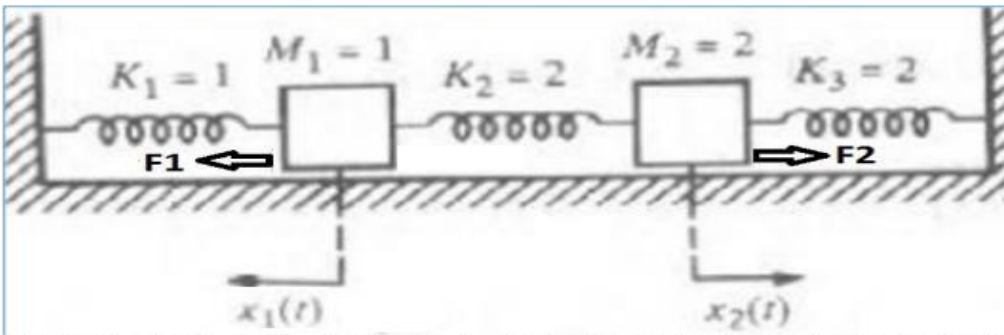
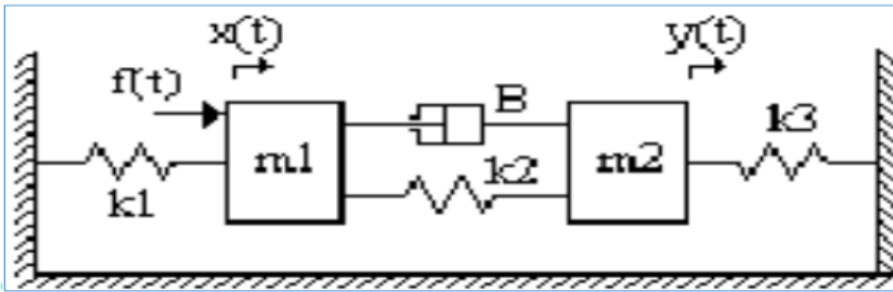
Generalizacion de sistemas

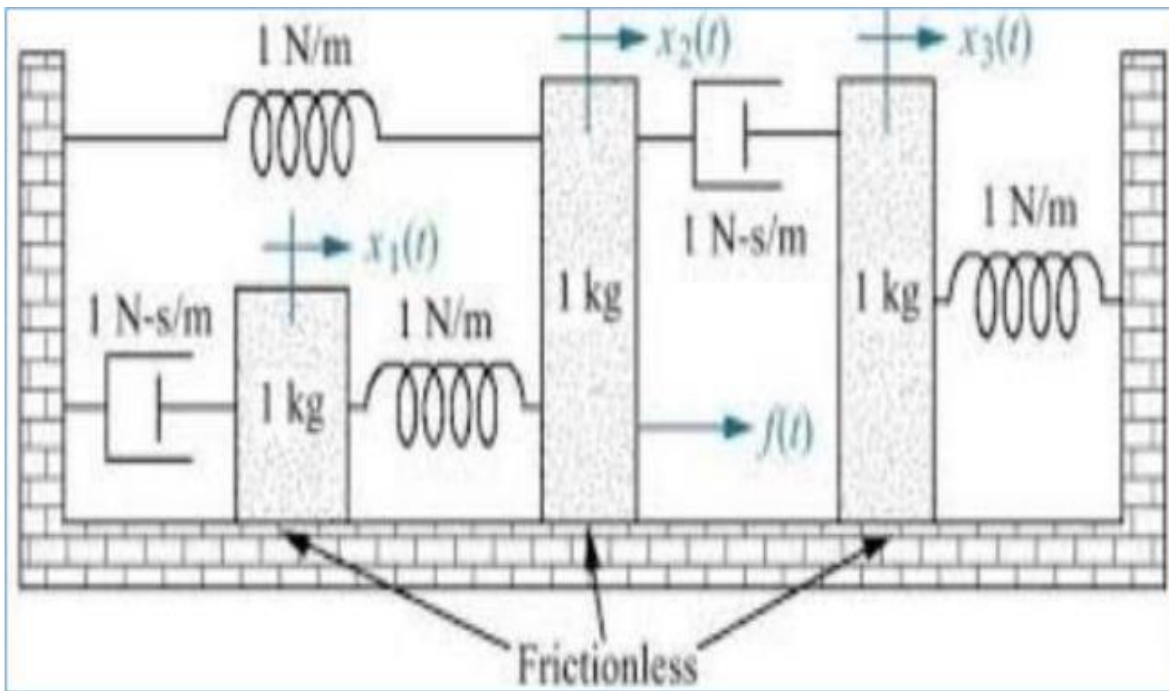
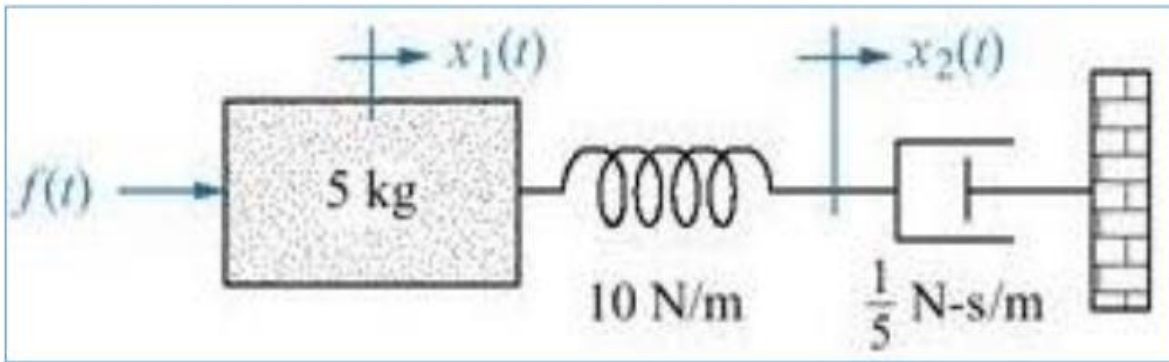
Sistemas de 1 orden

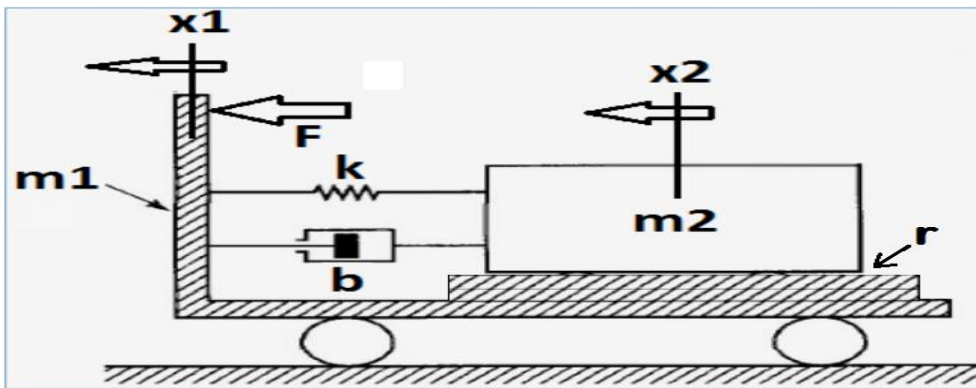
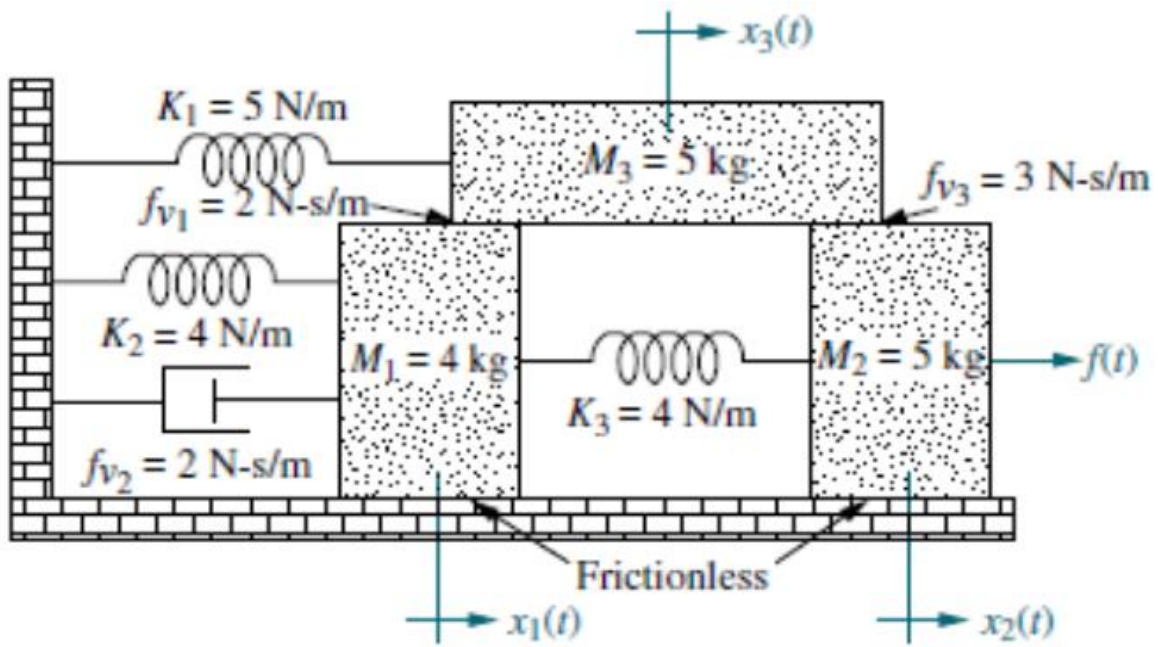
Sistemas de 1 orden

1. Representación en diagramas de estado
 - a. Representación de ecuaciones diferenciales
 - b. Circuitos electricos







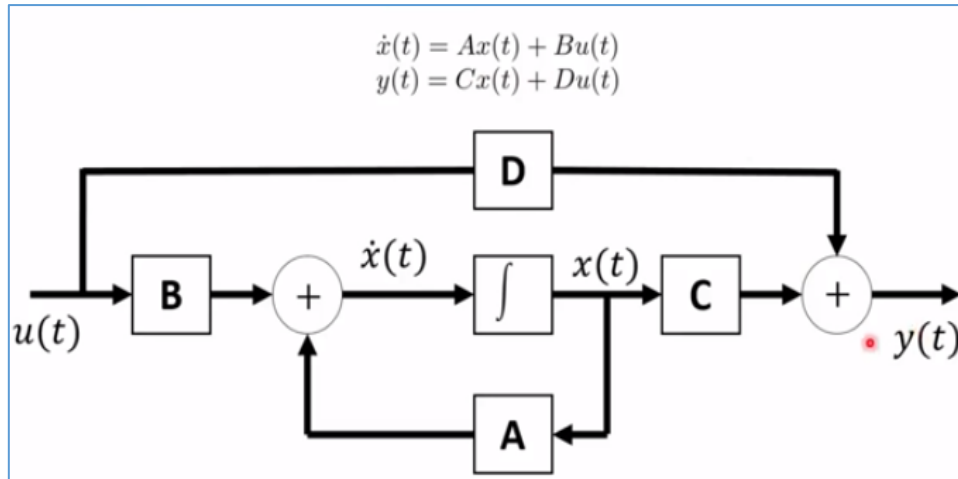


1.

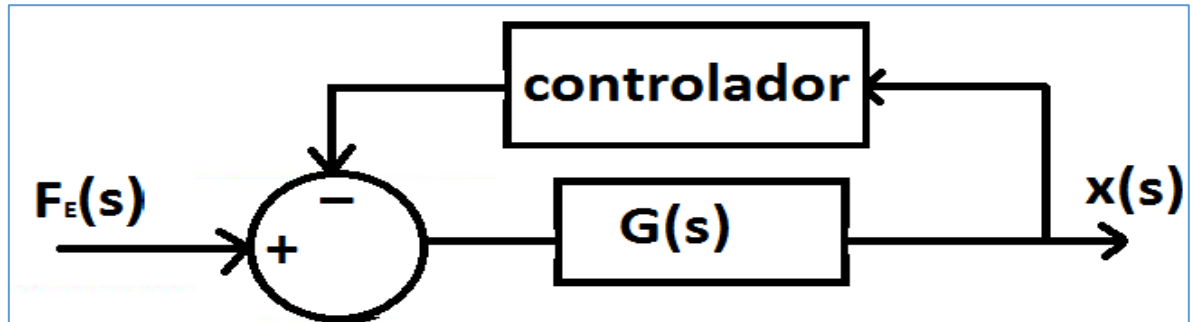
$x_2 = x_1$
 $x_3 = x_2$
 \vdots
 $x_{n-1} = x_n$
 $x_n = -a_n x_1 - \dots - a_1 x_n + u$
 o bien
 $\dot{x} = Ax + Bu$
 en donde

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

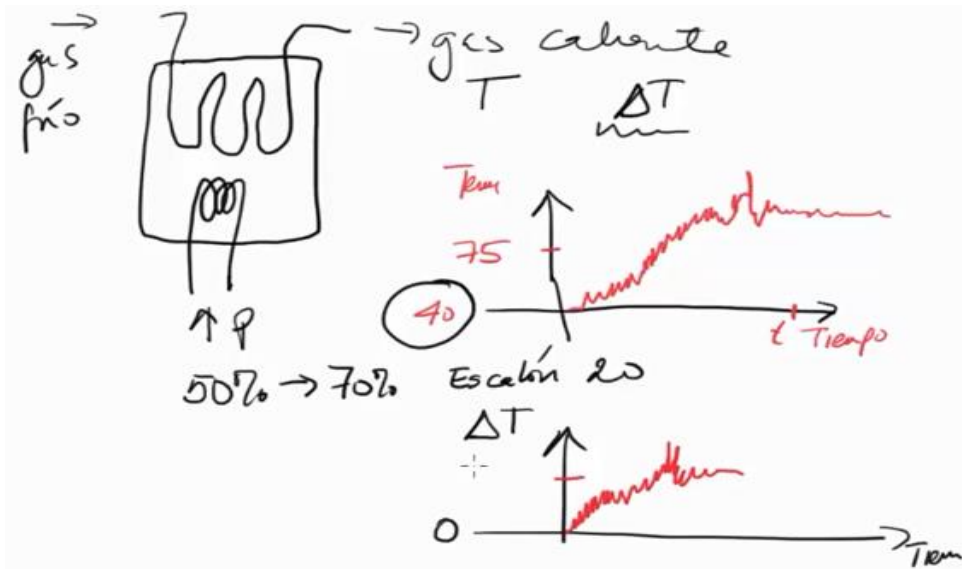
BLOQUES DE VARIABLES DE ESTADO



Ahora si decido controlar el movimiento del sistema masa-resorte-amortiguador mostrado arriba, yo puedo controlar la señal de **movimiento X(t)** mediante una acción de control que manipule la señal de **entrada F(t)**



Para 1.5 sistemas térmicos



<https://www.youtube.com/watch?v=i8JZbus5ztk>