

## **MODELAMIENTO MATEMÁTICOS DE SISTEMAS DINÁMICOS**

### **1. OBJETIVO GENERAL:**

Familiarizar al alumno con la metodología para modelar matemáticamente los sistemas dinámicos, realizando análisis y síntesis de sistemas de primer y segundo orden en atraso.

### **2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS:**

- 2.1 Familiarizar al alumno con el procedimiento para deducir la ecuación diferencial que gobierna el comportamiento global de los sistemas propuestos en el laboratorio.
- 2.2 Que el alumno internalice el concepto de linealización.
- 2.3 Capacitar al alumno para deducir la función transferencia de los sistemas dinámicos lineales.
- 2.4 Que el alumno internalice los conceptos de análisis y síntesis de sistemas dinámicos lineales de primer y segundo orden en atraso.
- 2.5 Que el alumno comprenda el procedimiento para administrar los errores en las mediciones basados en la teoría de error.

### **3. INTRODUCCIÓN TEÓRICA**

#### **3.1 Generalidades al modelamiento matemático de sistemas dinámicos.**

Para efectuar el análisis de un sistema, es necesario obtener un modelo matemático que lo represente. El modelo matemático equivale a una ecuación matemática o un conjunto de ellas en base a las cuales podemos conocer el comportamiento del sistema.

Es necesario comentar que el modelo matemático que se desarrolla a partir de un sistema no es único, debido a lo cual se pueden lograr representaciones diferentes del mismo proceso.

Estas diferentes representaciones no contradicen una a la otra. Ambas contienen información complementaria por lo que se debe encontrar aquella que proporcione la información de interés para cada problema en particular.

Para uniformizar criterios respecto a las denominaciones que reciben los elementos que conforman un sistema de control es necesario tener en mente las siguientes definiciones:

Planta	Cualquier objeto físico que ha de ser controlado.
Proceso	Operación o secuencia de operaciones, caracterizada por un conjunto de cambios graduales que llevan a un resultado o estado final a partir de un estado inicial.
Sistema	Combinación de componentes que actúan conjuntamente y cumplen un objetivo determinado.
Perturbación	Es una señal que tiende a afectar adversamente el valor de la salida de un sistema.
Servomecanismo	Sistema de control realimentado cuya salida es una posición mecánica.

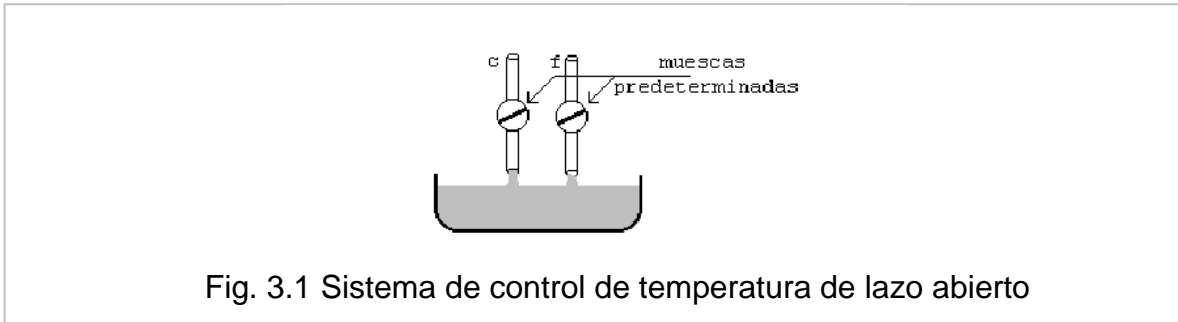
#### **3.2 Sistemas de control de lazo abierto y lazo cerrado.**

##### **3.2.1 Sistema de lazo abierto.**

Un sistema de lazo abierto es aquél donde la salida no tiene efecto sobre la acción de control. La exactitud de un sistema de lazo abierto depende de dos factores:

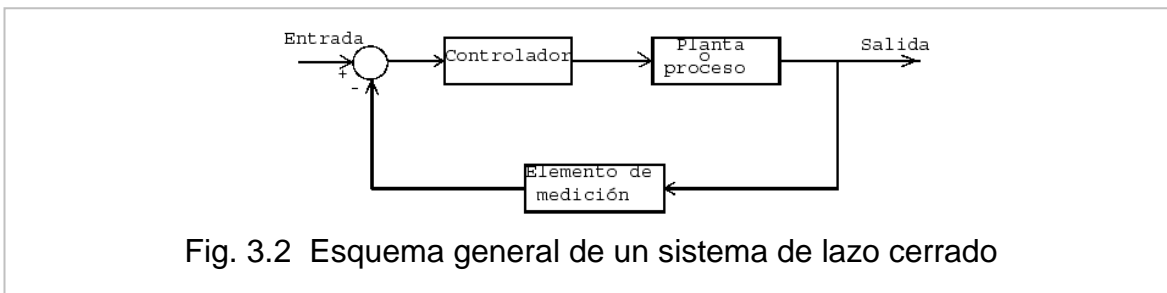
- a) La calibración del elemento de control.
- b) La repetitividad de eventos de entrada sobre un extenso período de tiempo en ausencia de perturbaciones externas.

Un esquema típico de un control de lazo abierto se puede apreciar en la figura 3.1. En ésta se muestra que para que la temperatura del agua en el estanque permanezca constante es necesario que las temperaturas en las tomas de agua fría y caliente no sufran cambios. Otro factor que incide sobre el estado final de la salida es la temperatura de operación del proceso. Si por cualquier motivo esta cambia, entonces la salida cambia en casi la misma proporción.



### 3.2.2 Sistema de lazo cerrado.

Un sistema de control de lazo cerrado es aquél donde la señal de salida tiene efecto sobre la acción de control. La figura 3.2 representa un panorama general de un sistema de lazo cerrado donde se puede apreciar que la salida es medida y retroalimentada para establecer la diferencia entre el valor deseado y el valor obtenido a la salida, y en base a esta diferencia, adoptar acciones de control adecuadas.



En las figuras 3.3, 3.4 y 3.5 se dan dos ejemplos para sistemas de control de lazo cerrado.

En cada una de estas figuras se puede apreciar que la parte fundamental para el control de la planta en cuestión es la red de retroalimentación que mide el estado de la salida. En estos ejemplos se ha pretendido establecer que la naturaleza de las señales en un lazo de control no necesariamente es la misma, esto es, pueden estar involucradas diferentes tipos de señales por ejemplo, mecánicas, eléctricas, térmicas, hidráulicas, etc., dentro del mismo lazo.

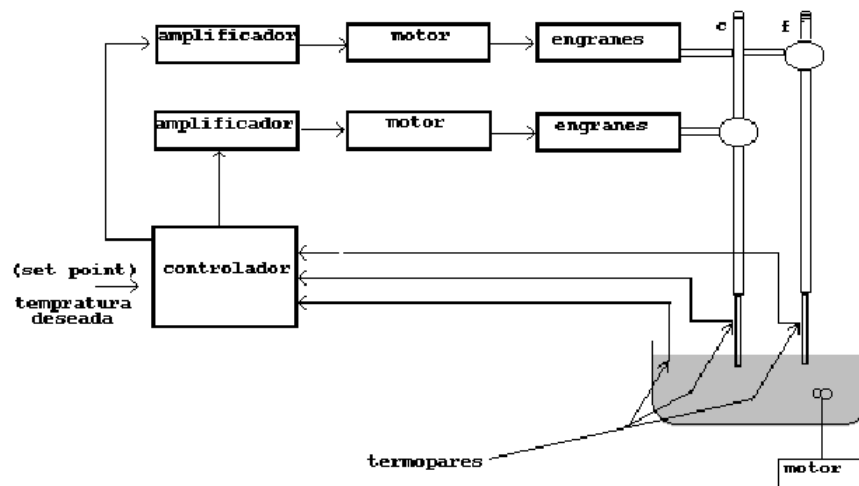


Fig. 3.3 Sistema de control de temperatura en lazo cerrado.

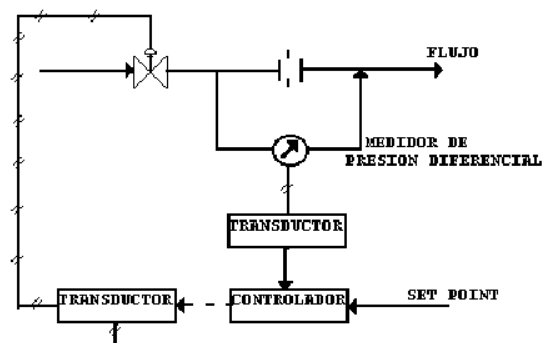
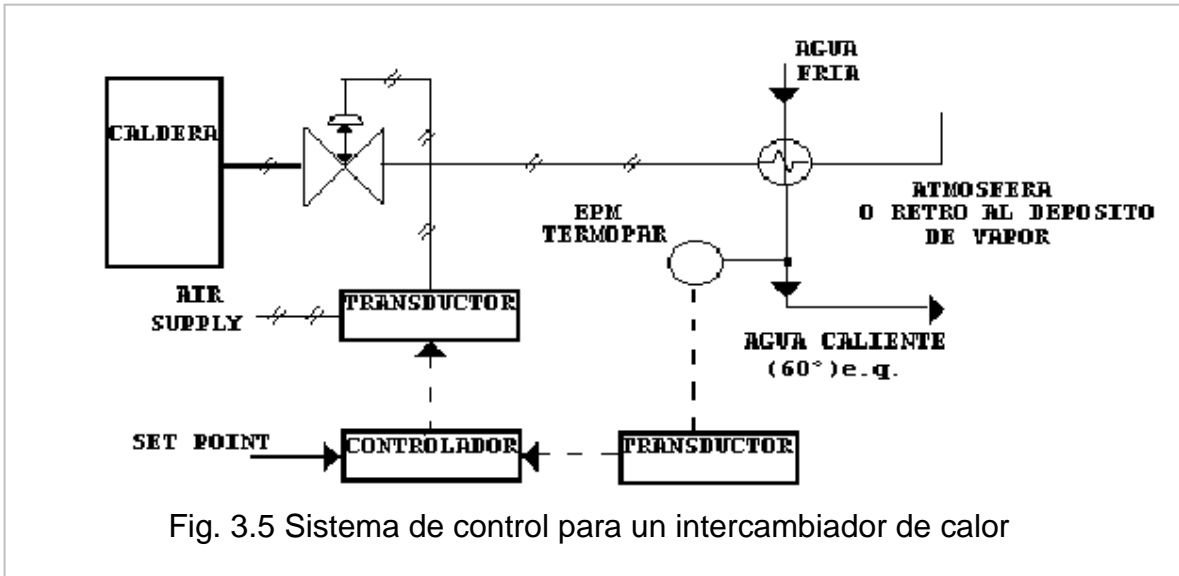


Fig. 3.4 Sistema de control de flujo por placa de orificio



### 3.3 Funciones de transferencia.

Una vez que se han definido los diferentes tipos de sistemas, es necesario conocer la dinámica de los mismos a partir de ecuaciones que relacionen el comportamiento de una variable respecto a otra. Para lograr lo anterior se requiere de gran conocimiento de los procesos y de los elementos que los conforman, y de cada una de las disciplinas de la ingeniería involucradas. Es por ello que la ingeniería de control se considera un campo interdisciplinario.

Una planta o cada una de las partes que forman un sistema de control, puede ser representada por un conjunto de ecuaciones integro-diferenciales de n-ésimo orden con coeficientes lineales invariantes en el tiempo que relacionan la variable de entrada con la variable de salida de la forma:

$$\frac{d^n}{dt^n}y(t) + a_n \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}y(t) + \dots + a_1 y(t) = b_{m+1} \frac{d^m}{dt^m}u(t) + \dots + b_1 u(t) \quad (3.1)$$

Donde: ai's y bi's son constantes, u(t) es la entrada y y(t) es la salida.

Usando la transformada de Laplace para convertir la ecuación integro-diferencial (3.1) en una ecuación algebraica considerando que las condiciones iniciales son iguales a cero llegamos a la siguiente expresión:

$$Y(s) [s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_1] = U(s) [b_{m+1} s^m + \dots + b_1] \quad (3.2)$$

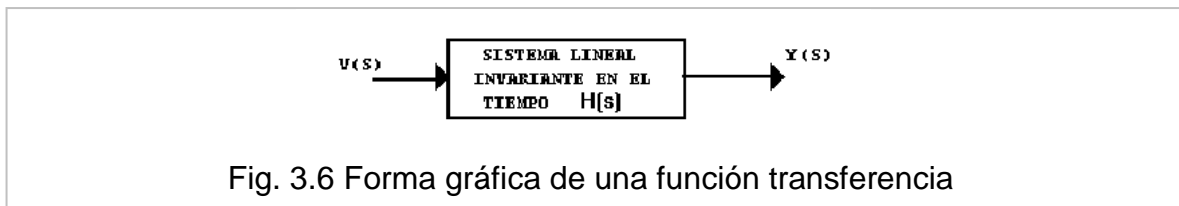
Relacionando la salida  $Y(s)$  con la entrada  $X(s)$  tenemos:

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_{m+1}s^m + \dots + b_1}{s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_1} \quad n > m \quad (3.3)$$

Esta última expresión es denominada la Función de transferencia del sistema.

La función de transferencia de un sistema lineal con coeficientes constantes invariantes en el tiempo esta definida como: "La relación de la transformada de Laplace de la salida con la transformada de Laplace de la entrada, suponiendo condiciones iniciales cero".

El hecho de trabajar con funciones de transferencia, simplifica en gran medida el manejo matemático de los sistemas dado que las ecuaciones diferenciales se transforman en ecuaciones algebraicas lineales, y las operaciones en el dominio de la frecuencia compleja "s" son multiplicaciones simples. Con ello la salida del bloque de la figura 1.6 es  $Y(s) = H(s) \cdot X(s)$



Una metodología a seguir para la determinación de la función de transferencia de un sistema es la siguiente:

- 1) Identificar las ecuaciones de equilibrio o leyes físicas involucradas en el sistema.
- 2) Siguiendo las ecuaciones de equilibrio plantear las ecuaciones integro-diferenciales correspondientes a cada variable de interés.
- 3) Obtener la transformada de Laplace de cada ecuación considerando condiciones iniciales cero.
- 4) Relacionar la variable de salida con la variable de entrada.

Dada la naturaleza multidisciplinaria de un sistema de control este puede estar conformado por subsistemas interconectados, donde cada uno de ellos contiene elementos cuyo comportamiento es estudiado por diferentes ramas de la ingeniería.

Es por esta razón que a continuación se estudiarán los elementos así como las leyes de equilibrio de los sistemas más comunes como son:

- Sistemas mecánicos.
- Sistemas eléctricos.
- Sistemas de nivel de líquidos.
- Sistemas térmicos.

### 3.4. Sistemas mecánicos.

Los sistemas mecánicos son una parte fundamental de la vida común, ya que cualquier cuerpo físico se comporta como tal. En general los sistemas mecánicos son gobernados por la segunda ley de Newton, la cual establece para sistemas mecánicos de traslación que "la suma de fuerzas en un sistema, sean estas aplicadas o reactivas, igualan a la masa por la aceleración a que esta sometida dicha masa".

$$\sum f = ma \quad (3.4)$$

Cuando se trata de sistemas mecánicos de rotación la segunda ley de Newton declara que "la suma de torques es igual al momento de inercia multiplicado por la aceleración angular".

$$\sum T = J\alpha \quad (3.5)$$

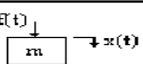
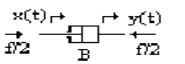
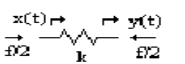
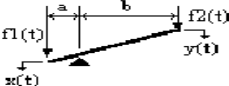
En cualquiera de los casos anteriores se tiene diferentes elementos cuyo acoplamiento conforma al sistema mecánico completo, pudiendo además interactuar entre cada caso. A continuación se describen las generalidades de ambos tipos de sistemas mecánicos.

#### 3.4.1 Sistemas mecánicos de traslación.

Los sistemas mecánicos de traslación están integrados por el conjunto de elementos básicos resumidos en la tabla 3.1

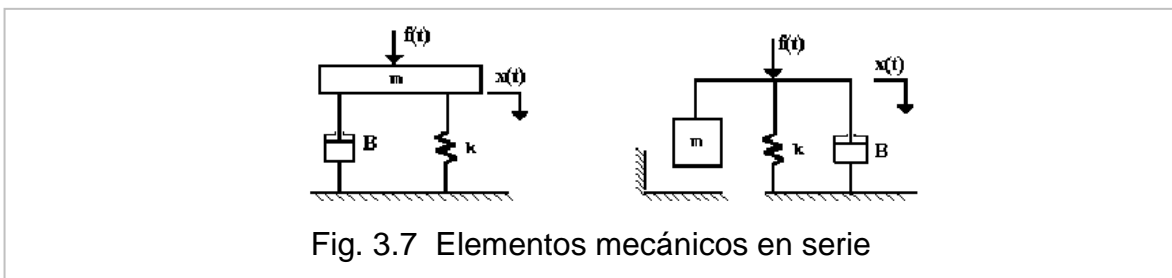
En este caso las variables involucradas son desplazamientos, velocidades, aceleraciones y fuerzas. La disposición que guardan estos elementos entre sí da lugar a dos configuraciones denominadas arreglos mecánicos en serie y arreglos mecánicos en paralelo.

Tabla 3.1 Elementos mecánicos de traslación

ELEMENTO	SIMBOLO	ECUACIÓN DE EQUILIBRIO	UNIDADES
MASA		$f_m = m \cdot \frac{d^2}{dt^2} x(t)$	[Kg], ó [N.s/m]
AMORTIGUADOR		$f_B = B \cdot \frac{d}{dt} [x(t) - y(t)]$	coeficiente de fricción viscosa B = [N.seg/m]
RESORTE		$f_k = k \cdot [x(t) - y(t)]$	módulo de elasticidad k = [N/m]
PALANCA		$y = \frac{b}{a+b} \cdot x$ $f_2 = \frac{a}{a+b} \cdot f_1$	adimensional

### Elementos mecánicos en serie.

En un elemento mecánico en serie, la fuerza aplicada  $f(t)$  es igual a la suma de las fuerzas actuantes en cada elemento y todos los elementos tienen el mismo desplazamiento (Fig. 3.7).



La ecuación de equilibrio para el arreglo de la figura 3.7 es:

$$f(t) = m \cdot \frac{d^2}{dt^2} x(t) + B \cdot \frac{d}{dt} x(t) + k \cdot x(t)$$

Y su transformada de Laplace considerando condiciones iniciales iguales a cero es:

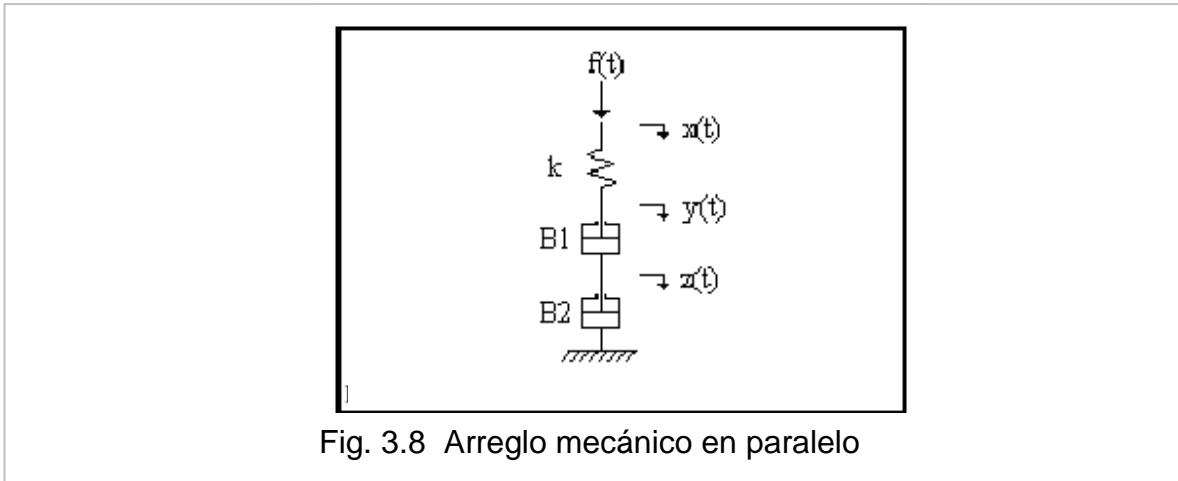
$$F(s) = (ms^2 + Bs + k)X(s)$$

Donde la impedancia mecánica es:

$$Z(s) = ms^2 + Bs + k$$

### Elementos mecánicos en paralelo.

En este tipo de arreglo la fuerza aplicada  $f(t)$  se transmite a través de todos los elementos. Además, la deformación o corrimiento total es la suma de los desplazamientos de cada elemento. La figura 3.8 muestra un ejemplo de este tipo de arreglo en el que considerando las ecuaciones ya transformadas el desplazamiento total está dado por:



La relación fuerza a desplazamiento queda como:

$$F(s) = \frac{1}{\frac{1}{k} + \frac{1}{B_1 s} + \frac{1}{B_2 s}} X(s)$$

Donde la impedancia mecánica es:

$$Z(s) = \frac{1}{\frac{1}{k} + \frac{1}{B_1 s} + \frac{1}{B_2 s}}$$

Un comentario importante respecto al comportamiento de una masa es que esta no puede estar en paralelo con otros elementos a menos que sea el último de los elementos. Para ilustrar lo anterior veamos que en la figura 3.9-a, la masa, al ser el último elemento, participa como si estuviera en paralelo dando la ecuación que relaciona la fuerza con el desplazamiento de la forma:

$$F(s) = \frac{1}{\frac{1}{k} + \frac{1}{B s} + \frac{1}{m s}} X(s)$$

mientras que en la figura 3.9-b al estar la masa colocada como un elemento intermedio, y tener el mismo desplazamiento  $y(t)$  en la parte superior e inferior, la sitúa en serie tanto con  $k_1$  como con  $k_2$  y  $B$  respecto al desplazamiento  $y(t)$

mientras que no tiene nada que ver con los desplazamientos  $x(t)$  y  $z(t)$  que afectan al comportamiento de los elementos  $k_1$  y  $k_2$ -B respectivamente.

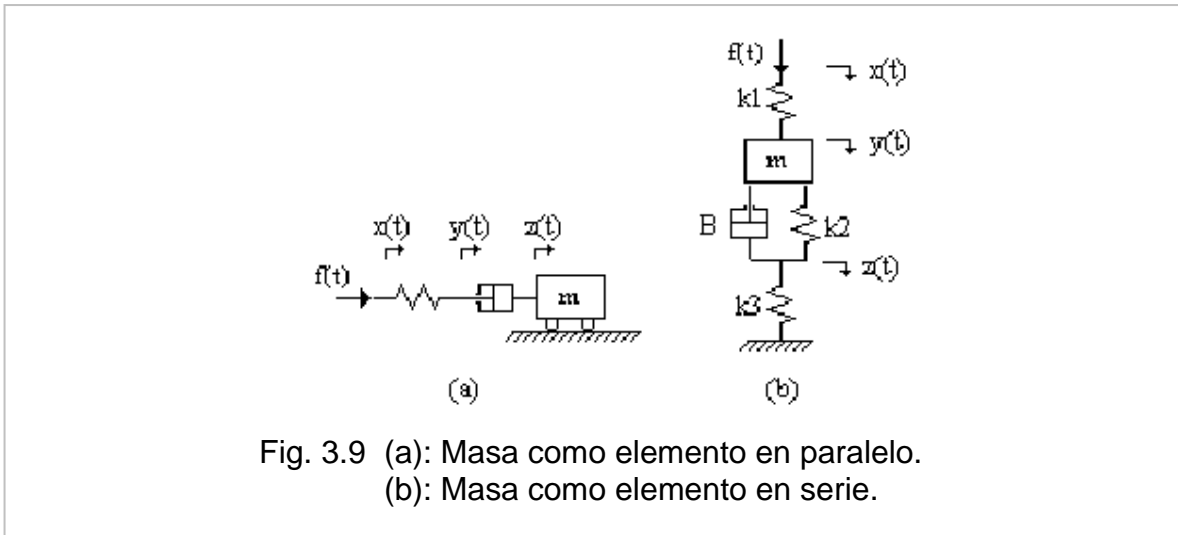


Fig. 3.9 (a): Masa como elemento en paralelo.  
 (b): Masa como elemento en serie.

Para el caso de la figura 3.9b las ecuaciones de equilibrio en cada desplazamiento son:

- en  $x(t)$ :

$$f(t) = k_1 \cdot [x(t) - y(t)]$$

- en  $y(t)$ :

$$m \cdot \frac{d^2}{dt^2} y(t) + k_1 \cdot [y(t) - x(t)] + B \cdot \frac{d}{dt} [y(t) - z(t)] + k_2 \cdot [y(t) - z(t)] = 0$$

- en  $z(t)$ :

$$k_2 \cdot [z(t) - y(t)] + B \cdot \frac{d}{dt} [z(t) - y(t)] + k_3 \cdot z(t) = 0$$

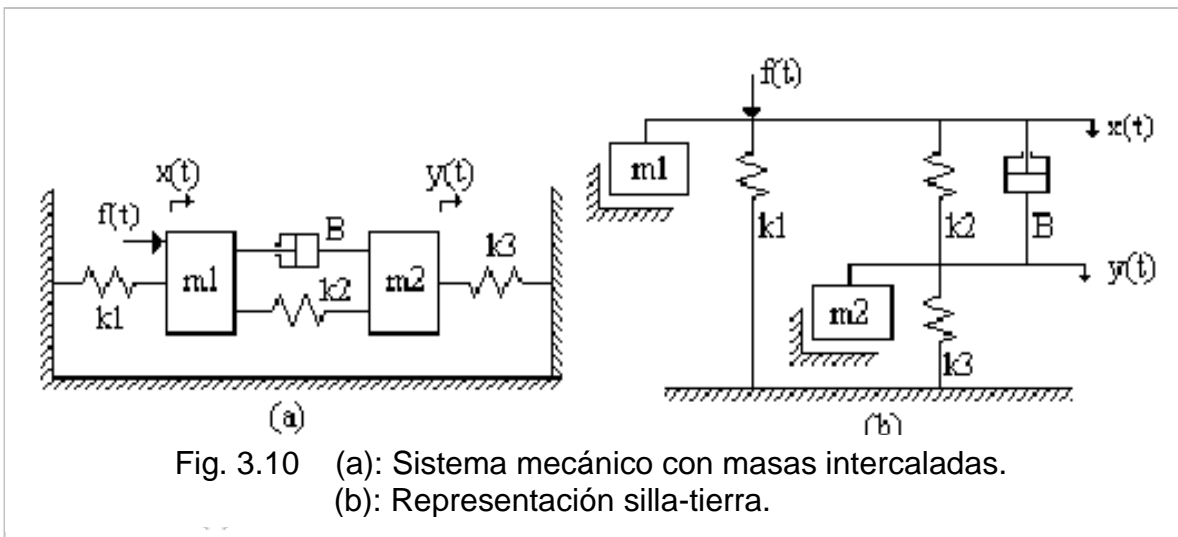
La determinación de la función de transferencia sigue los pasos expuestos con anterioridad.

### Representación silla a tierra.

Cuando en un sistema mecánico de traslación se mezclan arreglos serie y paralelo, el planteamiento de las ecuaciones de equilibrio puede resultar de difícil visualización. En este caso, y sobre todo cuando existen masas intercaladas en el arreglo, es posible recurrir a la denominada representación silla a tierra. Esta representación busca identificar los elementos conectados a cada desplazamiento del sistema considerando que las masas únicamente están referenciadas a tierra, y que los demás elementos pueden estar entre dos diferentes desplazamientos.

El procedimiento para obtener la representación es el siguiente:



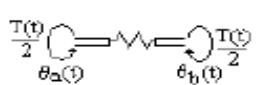
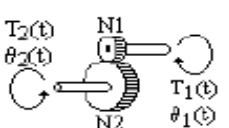
- 1) Dibujar las coordenadas tal que la fuerza esté arriba y la tierra abajo.
- 2) Identificar los desplazamientos y dibujar líneas horizontales para cada uno de ellos.
- 3) Insertar cada elemento (resortes y amortiguadores) en su orientación correcta entre los desplazamientos que le correspondan.
- 4) Insertar las masas en su desplazamiento correspondiente y referenciarla a tierra mediante una silla.
- 5) Escribir las ecuaciones de equilibrio para cada desplazamiento donde intervenga más de un elemento.



### 3.4.2. Sistemas mecánicos de rotación.

Los sistemas mecánicos de rotación son quizá el tipo de sistemas que con mayor frecuencia se encuentran en aplicaciones cotidianas. Estos abarcan cualquier sistema cuyo elemento motriz es un motor o una máquina rotatoria. Al igual que en los sistemas mecánicos de traslación, se tiene un conjunto de elementos básicos los cuales se encuentran resumidos en la tabla 3.2.

Tabla 3.2 Elementos mecánicos de rotación

ELEMENTO	SIMBOLO	ECUACION DE EQUILIBRIO	UNIDADES
MOMENTO DE INERCIA		$T(t) = J \cdot \frac{d^2}{dt^2} \theta(t)$	[N m seg <sup>2</sup> / rad]
ROZAMIENTO		$T_B(t) = B \cdot \frac{d}{dt} [\theta_a(t) - \theta_b(t)]$	[N m seg / rad]
DEFORMACIÓN		$T_k(t) = k \cdot [\theta_a(t) - \theta_b(t)]$	[N m / rad]
TREN DE ENGRANES		$T_2(t) = \frac{N_2}{N_1} \cdot T_1(t)$ $\theta_2(t) = \frac{N_1}{N_2} \cdot \theta_1(t)$	adimensional

Dentro de las aplicaciones de este tipo de sistemas podemos citar tornos, cajas de transmisión, sistemas de poleas, turbinas, etc.

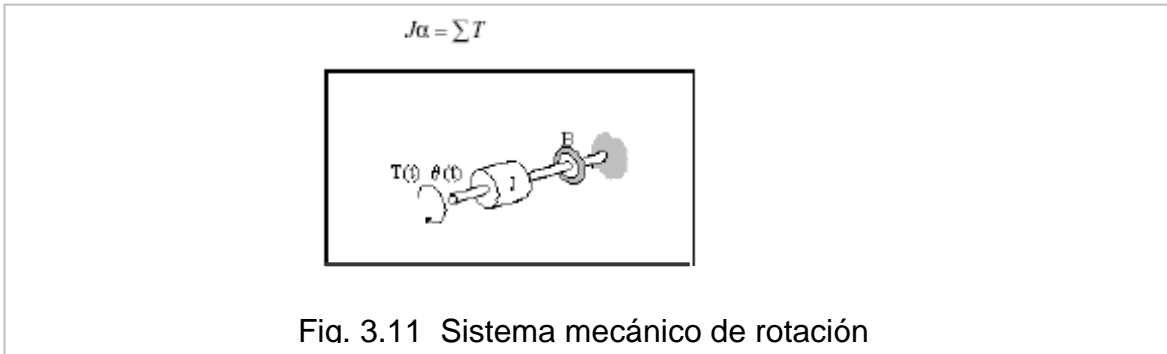
Las variables involucradas en los sistemas mecánicos de rotación son el par o torque, el desplazamiento angular, velocidad angular y la aceleración angular. Estas variables están relacionadas con las de los sistemas mecánicos de traslación por el radio de los elementos, así, el par en función de la fuerza esta dado por:

$$T(t) = r \cdot f(t) \tag{3.8}$$

Mientras que el desplazamiento angular se puede obtener a partir del desplazamiento lineal por medio de:

$$\theta(t) = x(t) / r \tag{3.9}$$

Por ejemplo para el sistema mostrado en la figura 3.11 la ley de Newton establece que:



La condición de equilibrio queda descrita por:

$$J \frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = T(t) - f \frac{d\theta(t)}{dt}$$

Donde:

$$\omega(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \quad \text{y} \quad \alpha(t) = \frac{d\omega(t)}{dt}$$

Aplicando la transformada de Laplace:

$$J \cdot s^2 \cdot \Omega(s) + f \cdot s \cdot \Omega(s) = T(s)$$








Relacionando la variable de salida velocidad angular con la variable de entrada por aplicado tenemos:

$$\frac{\Omega(s)}{T(s)} = \frac{1}{Js^2 + f \cdot s}$$

### 3.5. Sistemas Eléctricos.

Otro de los sistemas que con frecuencia aparecen en los lazos de control son los que involucran variables eléctricas. Aunque el número de componentes eléctricos es inmenso, por lo general se puede considerar un conjunto básico compuesto por los elementos que aparecen en la tabla 3.3 en donde también se incluye las expresiones que relacionan las variables de voltaje y corriente en los dispositivos.

Tabla 3.3 Elementos eléctricos

ELEMENTO	SIMBOLO	ECUACIÓN	UNIDADES
RESISTENCIA		$v(t) = R \cdot i(t)$	Ohmio $\Omega$
INDUCTANCIA		$v(t) = L \cdot \frac{d \cdot i(t)}{dt}$	Henrio H
CAPACITANCIA		$v(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i(t) dt$	Faradio F
FUENTE DE VOLTAJE CONTROLADA POR VOLTAJE		$v(t) = k \cdot v_c(t)$	Adimensional
FUENTE DE CORRIENTE CONTROLADA POR CORRIENTE		$i(t) = k \cdot i_c(t)$	Adimensional
FUENTE DE VOLTAJE CONTROLADA POR CORRIENTE		$v(t) = r_m \cdot i_c(t)$	Transresistencia $r_m$ Ohmio $\Omega$
FUENTE DE CORRIENTE CONTROLADA POR VOLTAJE		$i(t) = g_m \cdot v_c(t)$	Transconductancia $g_m$ Siemen

Las ecuaciones de equilibrio que gobiernan el comportamiento de los sistemas eléctricos son conocidas como las leyes de Kirchhoff de voltaje y corriente (LKV y LKC) las cuales establecen lo siguiente:

Ley de Voltaje de Kirchhoff (LKV)

"La suma algebraica de las caídas de tensión a lo largo de un trayectoria cerrada es cero".

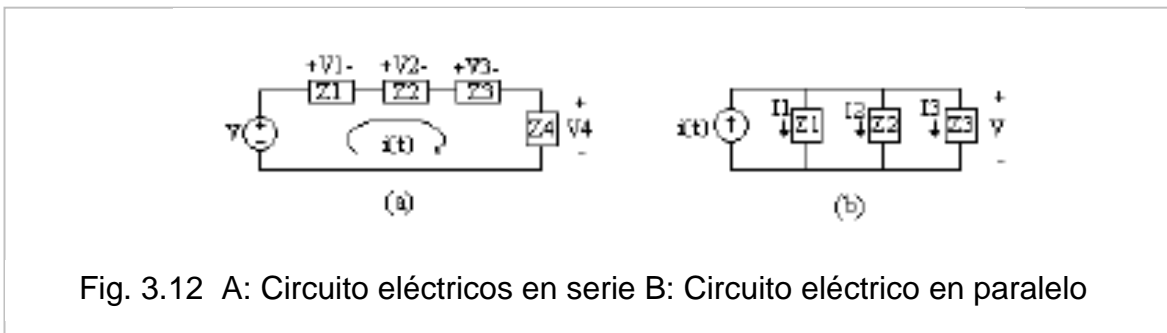
$$\sum v = 0 \quad 3.10$$

Ley de corrientes de Kirchhoff (LKC)

"La suma algebraica de las corrientes en un nodo es igual a cero".

$$\sum i = 0 \quad 3.11$$

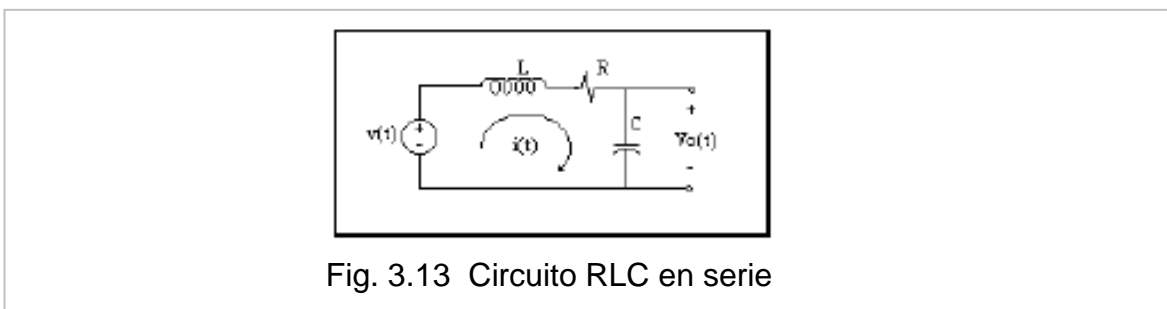
Ambas leyes pueden ser usadas de manera combinada para determinar el conjunto de ecuaciones integro-diferenciales necesarias para predecir el comportamiento de un sistema eléctrico. Normalmente cuando se analiza un circuito eléctrico en serie se usa la LVK mientras cuando se trata de un circuito eléctrico en paralelo se emplea la LCK. En cualquier texto de análisis de circuitos se pueden encontrar las particularidades de cada uno de los circuitos mencionados. Aquí únicamente mencionaremos que en un circuito eléctrico en serie circula la misma corriente por todos los elementos del arreglo mientras que el voltaje se encuentra repartido entre los elementos (figura 3.12a). por otro lado, en un circuito eléctrico en paralelo todos los elementos tiene el mismo voltaje en sus terminales mientras que la corriente se distribuye entre todos los elementos (figura 3.12b). En la figura 3.12 las Z's pueden ser cualquiera de los elementos dados en la tabla 1.3 y cumplen con las relaciones voltaje-corriente indicadas.



### Sistemas eléctricos en serie.

Como ya se indicó un sistema eléctrico en serie está formado por elementos a través de los cuales circula la misma corriente. En la figura 3.13 se ha retomado el esquema propuesto en la figura 3.12a sustituyendo los bloques de impedancia por elementos R, L y C de la tabla 3.3. Si aplicamos la LVK tenemos que:

$$v(t) - v_L(t) + v_R(t) + v_C(t) = 0 \quad 3.12$$



Sustituyendo las relaciones de la tabla 3.3 de acuerdo al elemento tenemos:

$$v(t) = R \cdot i(t) + L \cdot \frac{d}{dt} i(t) + \frac{1}{C} \cdot \int i(t) dt \quad 3.13$$

el voltaje de salida sera:

$$v_o(t) = \frac{1}{C} \cdot \int i(t) dt \quad 3.14$$

Cabe mencionar que el análisis puede hacerse planteando las ecuaciones diferenciales como en los pasos anteriores o empleando directamente las impedancias complejas derivadas de transformar las relaciones voltaje-corriente de la tabla 3.3. Aplicando la transformada de Laplace a las dos ecuaciones precedentes obtenemos las ecuaciones algebraicas en el dominio de la variable compleja s.

$$V(s) = R \cdot I(s) + sL \cdot I(s) + \frac{1}{sC} I(s) \quad 3.15$$

$$V_o(s) = \frac{1}{sC} I(s) \quad 3.16$$

despejando la corriente I(s) de (3.16) y sustituyendo en (3.15) obtenemos una expresión que involucra únicamente a las variables de interés Vo(s) y V(s) de la cual ya podemos relacionar la salida con la entrada y por lo tanto obtenemos la función de transferencia.

$$V(s) = RCsV_o(s) + LCs^2V_o(s) + V_o(s)$$

$$\frac{V_o(s)}{V(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \quad 3.17$$

### Sistemas eléctricos en paralelo.

En un sistema eléctrico en paralelo como ya se ha mencionado, la corriente se encuentra distribuida en todos los elementos que forman el circuito mientras que el voltaje aplicado a las terminales de cada uno de ellos es el mismo. La figura 1.14 muestra el esquema más simple de un circuito paralelo en el cual la ecuación de equilibrio debe ser determinada para el nodo bajo análisis, que para nuestro ejemplo es el nodo a dado que el otro nodo existente es la referencia o tierra. Para el caso de circuitos en paralelo la ley que gobierna el comportamiento del circuito es la anteriormente citada ley de corrientes de Kirchhoff (LCK), de este modo la condición de equilibrio para el nodo a será:

$$i(t) - i_R(t) - i_L(t) - i_C(t) = 0 \quad 3.18$$

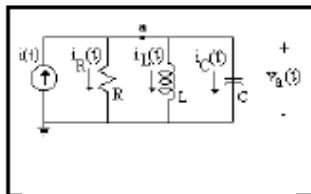


Fig. 3.14 Circuito eléctrico en paralelo

de las relaciones de la tabla 3.3 tenemos que:

$$i(t) - \frac{v_a(t)}{R} - \frac{1}{L} \frac{dv_a(t)}{dt} - C \int v_a(t) dt = 0 \quad 3.19$$

Aplicando la transformada de Laplace considerando condiciones iniciales iguales a cero tenemos que (3.19) tomará la forma:

Relacionando la variable de salida  $V_a(s)$  con la variable de entrada  $I(s)$  obtenemos

$$I(s) - \frac{V_a(s)}{R} - \frac{V_a(s)}{sL} - sC V_a(s) = 0 \quad 3.20$$

la función de transferencia.

$$\frac{V_a(s)}{I(s)} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{sL} + sC} \quad 3.21$$

### 3.6 Sistemas de Nivel de Líquidos.

Para iniciar el estudio de los sistemas de nivel de líquidos es necesario definir los conceptos de resistencia al flujo y capacitancia en un tanque que almacena un fluido. La resistencia al flujo debida a una restricción es lineal cuando el flujo es laminar y se comporta como un sistema no lineal cuando el flujo es turbulento. En ambos casos se define como el cociente de la diferencia de niveles en el recipiente entre el cambio en el gasto.

$$R = \frac{\text{cambio en la diferencia de niveles [m]}}{\text{cambio en el gasto [m}^3/\text{seg]}} \quad 3.22$$

Para flujo laminar el gasto es proporcional a la columna hidrostática, es decir:

$$Q = K_1 H \quad 3.23$$

Mientras que para flujo turbulento es proporcional a la raíz cuadrada de la columna hidrostática:

$$Q = K_t \sqrt{H} \quad 3.24$$

Donde:

Q = gasto en [m<sup>3</sup>/seg].

Kl = coeficiente de proporcionalidad para flujo laminar [m<sup>2</sup>/seg].

Kt = coeficiente de proporcionalidad para flujo turbulento [m<sup>2.5</sup>/seg].

H = columna hidrostática [m].

De la definición de resistencia, para un sistema con flujo laminar tenemos:

$$R_l = \frac{dH}{dQ} = \frac{H}{Q} \quad 3.25$$

De igual forma para un flujo turbulento la resistencia al flujo debida a una restricción esta dada por:

$$R_t = \frac{dH}{dQ}$$

Donde la diferencial del gasto es:

$$dQ = \frac{K_t}{2\sqrt{H}} dH$$

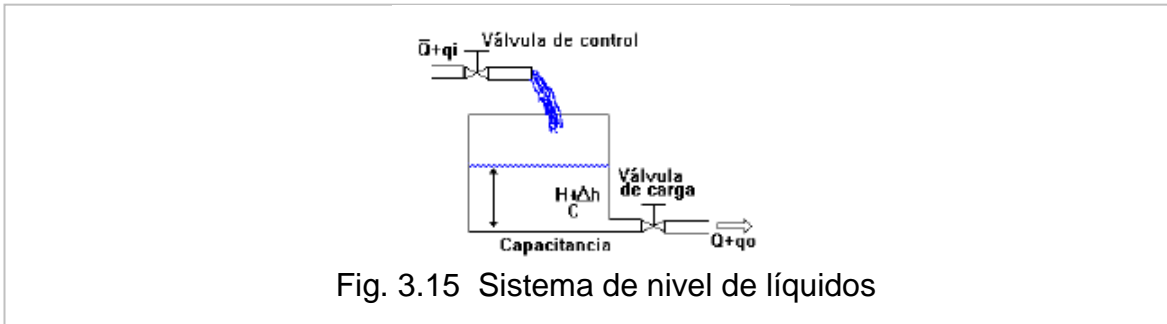
Con lo cual la expresión para la resistencia al flujo turbulento queda como:

Siendo  $K_t = \frac{Q}{\sqrt{H}}$   
 $R_t = \frac{2H}{Q}$

Entonces tenemos que:

$$R_t = \frac{dH}{\frac{K_t}{2\sqrt{H}} dH} = \frac{2\sqrt{H}}{K_t} \quad 3.27$$

Esta aproximación es válida solo en el caso en que las variaciones en el gasto y en la columna hidrostática sean pequeñas alrededor del punto de operación.



Por otro lado, la capacitancia de un tanque se define como el cociente de la variación del líquido acumulado entre el cambio en la columna hidrostática. lo cual resulta en unidades de área por lo que la capacitancia de un estanque se puede considerar como la sección transversal del tanque bajo estudio.

$$C = \frac{\text{cambio en la cantidad de líquido acumulado [m}^3\text{]}}{\text{cambio en la columna hidrostática [m]}} \quad 3.28$$

En los sistemas de nivel de líquido la condición de equilibrio viene declarada como:

$$Cdh(t) = [q_i(t) - q_o(t)]dt \quad 3.29$$

"La diferencia del gasto de entrada y el gasto de salida en una unidad pequeña de tiempo es igual a la cantidad de líquido acumulado"; es decir: En (3.29) el término de la izquierda es la cantidad de líquido almacenado. La cantidad de gasto a la salida del tanque está definido en función de la resistencia al flujo de la restricción como:

$$q_o(t) = \frac{h(t)}{R}$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación anterior tenemos:

$$RC \frac{dh(t)}{dt} + h(t) = Rq_i(t) \quad 3.30$$

Transformando esta expresión considerando condiciones iniciales cero tenemos:

$$(sRC + 1)H(s) = RQ_i(s) \quad 3.31$$

Relacionando la variable de salida (nivel) con la de entrada (flujo de entrada) llegamos a la función de transferencia:

$$\frac{H(s)}{Q_i(s)} = \frac{R}{sRC + 1}$$

### 3.7 Sistemas Térmicos.

En general, el número de sistemas térmicos que pueden ser descritos por ecuaciones diferenciales lineales es limitado. La condición básica para garantizar linealidad es que la temperatura del cuerpo bajo estudio sea uniforme, lo que en la mayoría de los casos prácticos no se cumple, sin embargo, esta aproximación es válida cuando se desea representar el comportamiento de cuerpos pequeños, aire o líquidos, siempre que exista una mezcla perfecta de fluido en el medio.

Las variables involucradas en sistemas térmicos son la razón del flujo calorífico  $q(t)$  y la temperatura  $T(t)$ . La tabla 3.4 hace un resumen de las variables, elementos, y cantidades físicas involucradas en el estudio de esta clase de sistemas.

Tabla 3.4 Elementos y variables de los sistemas térmicos

SIMBOLO	CANTIDAD	UNIDADES
q	Razón de flujo calorífico	Joules/segundo
h	coeficiente de transferencia de calor	(joules/seg)/cm <sup>2</sup>
M	Masa	Kilogramo
A	Area de intercambio de calor	m <sup>2</sup>
c	Calor específico promedio	Joules/Kg°C
C <sub>T</sub>	Capacitancia térmica	Joules/°C
R	Resistencia térmica	Grado/(Joule/seg)
T	Temperatura	°C
e	Energía calorífica	Joules

La condición de equilibrio para sistemas térmicos establece es: que "el calor administrado a un sistema es igual al calor almacenado más el calor liberado"

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Energía} \\ \text{de entrada} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Razón de energía} \\ \text{almacenada} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{l} \text{Energía de} \\ \text{salida} \end{array} \right\}$$

Esta condición expresada en términos de la razón del flujo calorífico y la temperatura queda como:

$$q = hA(T_2 - T_1) = \frac{T_2 - T_1}{R_T} \quad 3.33$$

la cual indica que la razón de transferencia de calor en un cuerpo es proporcional a la diferencia de temperatura a través del cuerpo donde  $T_2$  es la temperatura del medio circundante y  $T_1$  es la temperatura del cuerpo.

Por otro lado, la velocidad del cambio en la temperatura se relaciona con la razón de transferencia calorífica dentro del cuerpo por medio de la ecuación:

$$Q = M c \frac{dT}{dt} = C_T \frac{dT}{dt}$$

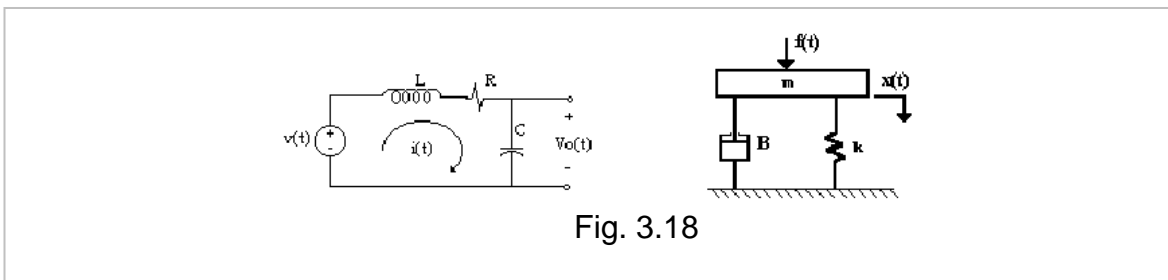
### 3.8 Analogías

En una gran cantidad de casos, es necesario realizar simulaciones de las ecuaciones derivadas del proceso de modelado. Sin embargo, la disciplina ingenieril de la persona que efectúa la simulación determinará la clase de simulador a utilizar. Por lo general los simuladores de procesos están enfocados hacia usuarios de una especialidad en particular por lo que es necesario convertir las ecuaciones diferenciales a sistemas ya sean mecánicos o eléctricos cuyo comportamiento sea análogo al original.

Dentro de las analogías de sistemas más comunes están aquellas que relacionan sistemas mecánicos y eléctricos, por lo que enfocaremos nuestra atención a este caso en particular.

#### 3.8.1. Analogía fuerza-voltaje.

Considerando los sistemas mostrados en la figura 3.18 podemos determinar el siguiente conjunto de ecuaciones diferenciales:



Para el circuito eléctrico:

y para el sistema mecánico:

$$m \frac{d^2x(t)}{dt^2} + B \frac{dx(t)}{dt} + kx(t) = f(t) \quad 3.36$$

Si expresamos la ecuación (3.35) en términos de la carga obtenemos:

$$L \frac{d^2q(t)}{dt^2} + R \frac{dq(t)}{dt} + \frac{q(t)}{C} = v(t) \quad 3.37$$

Si comparamos (3.36) y (3.37) observamos que son sistemas análogos, esto es, tienen una ecuación diferencial idéntica, y podemos establecer las relaciones resumidas en la tabla 3.5:

fuerza (par)	voltaje (v)
masa m (momento inercia)	inductancia (L)
fricción viscosa B	resistencia (R)
constante de resorte k	capacitancia (C)
desplazamiento (desplazamiento angular)	carga (q)
velocidad (velocidad angular)	corriente (i)

### 3.8.2. Analogía fuerza-corriente.

De manera similar podemos considerar los sistemas mostrados en la figura 3.19 para establecer la relación existente entre las ecuaciones de fuerza de un sistema mecánico y un sistema eléctrico.

Las ecuaciones que describen el sistema para el circuito eléctrico son:

$$\frac{1}{L} \int v(t) dt + \frac{v(t)}{R} + C \frac{dv(t)}{dt} = i(t)$$

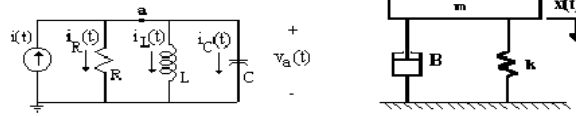


Fig. 3.18

que expresada en términos del flujo magnético  $v(t) = \frac{d\psi(t)}{dt}$  nos da:

$$C \frac{d^2\psi(t)}{dt^2} + \frac{1}{R} \frac{d\psi(t)}{dt} + \frac{1}{L} \psi(t) = i(t) \quad 3.38$$

Dado que el sistema mecánico ha sido considerado el mismo que para la analogía fuerza voltaje podemos comparar (3.36) y (3.38) para obtener obtenemos las relaciones dadas en la tabla 3.6 que son denominadas analogías fuerza-corriente.

Tabla 3.6 Analogías Fuerza-Voltaje

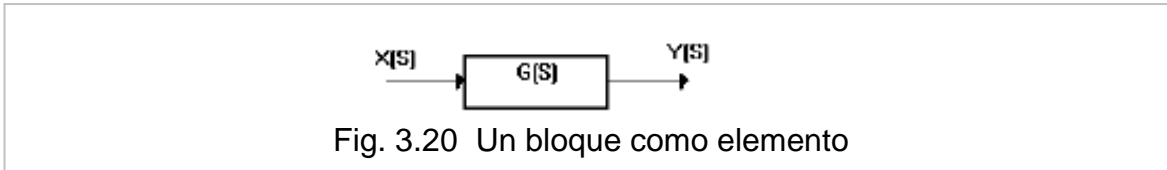
Sistema mecánico	Sistema Eléctrico
fuerza	corriente $i$
masa (momento de inercia)	capacitancia (C)
fricción viscosa B	Resistencia (R)
constante de resorte k	inductancia (L)
desplazamiento (desplazamiento angular)	flujo magnético
velocidad (velocidad angular)	voltaje (v)

### 3.9 Diagramas de Bloques.

Los diagramas de bloques son una representación gráfica de las variables de un sistema, y está constituido de tres partes principales:

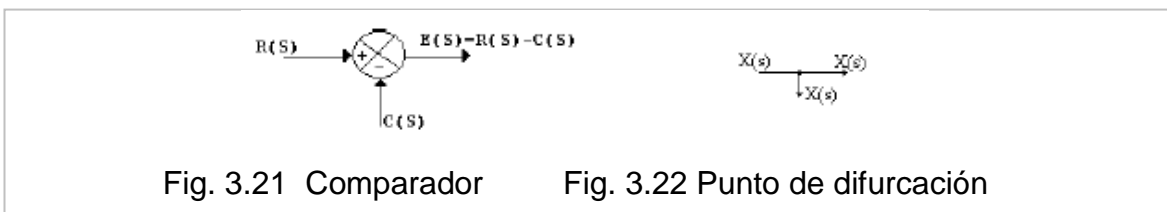
- (a) Elementos.
- (b) Detectores de error.
- (c) Puntos de Bifurcación.

Un elemento muestra la dependencia funcional de una variable con respecto a la otra. Por lo general en un bloque se incluye una función de transferencia parcial que a su vez puede ser usada para generar un bloque que represente al sistema total.



Un detector de error (figura 3.21) es una parte del diagrama que entrega la diferencia de dos señales incidentes. En ocasiones este elemento puede ser usado como un sumador de señales.

Y por último un punto de bifurcación es aquél donde una salida se deriva hacia otros elementos del diagrama (figura 3.22).



Usando estos elementos básicos es posible obtener la representación en diagramas de bloques de un sistema de control de lazo cerrado. La forma general del sistema de lazo cerrado en su forma más simple se muestra en la figura 3.23 donde se representan las funciones de transferencia esenciales usadas en el ámbito del control industrial, así como las principales señales de interés.

Estas funciones y señales son:

- Función de transferencia directa  $G(s)$  que es el objeto del control, es decir, la planta a controlar.
- Función de transferencia de retroalimentación  $H(s)$  que representa al sistema de medición.
- Señal de salida  $C(s)$  que es la señal a controlar.
- Señal de entrada  $R(s)$  también llamada señal de referencia, y:
- Señal de error  $E(s)$  que nos indica si un sistema ha alcanzado el valor de salida deseado.

Es importante hacer notar que las señales en cada punto del diagrama de bloques pueden ser de naturaleza totalmente diferente una de la otra, es decir, mientras la salida puede ser temperatura, la señal a la salida del sistema de medición  $B(s)$  puede ser voltaje, presión, corriente, intensidad luminosa, etc..

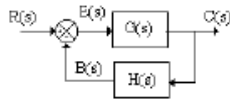


Fig. 3.23 Sistema de control en lazo cerrado

Manipulando algebraicamente las señales presentes en la figura 3.23 llegamos a la siguiente ecuación que es la forma general de la función de transferencia de lazo cerrado:

$$\frac{C(S)}{R(S)} = \frac{G(S)}{1 + G(S)H(S)} \quad 3.39$$

En esta ecuación se pueden identificar dos términos que son de suma importancia para los objetivos de este trabajo. En primer lugar, esta la función formada por el producto de la función de transferencia directa y de la función de transferencia de retroalimentación:

$$G(s)H(s) = \text{Función de transferencia de lazo abierto} \quad 3.40$$

que es denominada la función de transferencia de lazo abierto. En segundo término está el observar que los polos de la función de lazo cerrado están en las soluciones del polinomio dado por:

a esta última ecuación se le llama la ecuación característica.

$$1 + H(S)G(S) = 0 \quad 3.41$$

En este momento es necesario detenerse un poco a meditar sobre la importancia de las ecuaciones (3.40) y (3.41). Estas dos ecuaciones contienen información que en los laboratorios siguientes será utilizada para el desarrollo de las herramientas de análisis necesarias para la definición y diseño de sistemas de control. Si despejamos la función de transferencia de lazo abierto de la ecuación (3.41) obtenemos:

$$G(s)H(s) = -1 \quad 3.42$$

lo cual sugiere el hecho de que cuando la función de transferencia de lazo abierto, en algún valor de la variable compleja  $\omega + \sigma = j s$ , cumple con esta condición, el denominador de la función de transferencia de lazo cerrado será cero y por lo tanto dicha función quedará indeterminada, lo que físicamente corresponde a una condición de inestabilidad. Dado que el valor de la variable compleja  $s$  es un número complejo, entonces la ecuación (3.42) es un fasor que contiene

información de la magnitud y la fase de la función  $G(s)H(s)$ , esto es, la magnitud esta dada por:

$$|G(s)H(s)|_{s=\sigma+j\omega} = 1 \quad 3.43$$

mientras que la fase está dada por:

$$\angle G(s)H(s)|_{s=\sigma+j\omega} = \pm 180(2k+1) \quad 3.44$$

A las ecuaciones (3.43) y (3.44) se le conoce como las condiciones de módulo y ángulo respectivamente.

Continuando con nuestra discusión de los diagramas de bloques, es conveniente comentar que no todos los sistema contienen una sola entrada y una sola salida como los que hemos tratado hasta el momento (sistema SISO de las siglas en inglés simple-input simple-output). Es común en la práctica encontrar sistemas que tienen más de una entrada y más de una salida (MIMO multiple-input multiple-output). Sin embargo para los sistemas que nos interesa estudiar nos limitaremos unicamente al caso donde se tengan dos entradas y una salida, donde la segunda entrada es una señal de perturbación externa (figura 3.24).

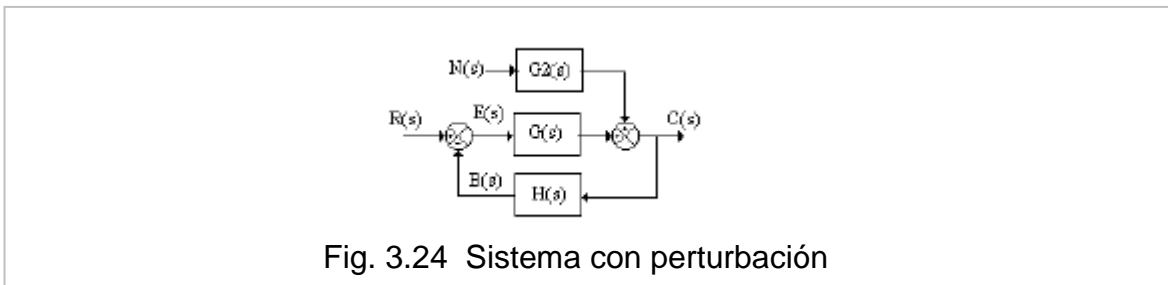


Fig. 3.24 Sistema con perturbación

Como la función de transferencia se obtiene a partir de sistemas lineales, cuando un sistema tiene una perturbación externa, este se puede analizar utilizando el principio de superposición considerando la contribución de la entrada y la perturbación por separado para posteriormente sumar las dos respuestas. De esta forma la respuesta esperada  $C(s)$  es:

$$C(s) = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} R(s) + \frac{G_2(s)}{1+G(s)H(s)} N(s) \quad 3.45$$

En la ecuación (3.45) se aprecia que el concepto de función de transferencia no se aplica en el caso de más de una entrada.

Una de las mayores ventajas de los sistemas de control de lazo cerrado es que las variaciones de las funciones de transferencia directa afectan en menor medida el comportamiento del sistema.

### 3.9.1 Procedimiento para trazar diagramas de bloques.

Los diagramas de bloques son importantes cuando se desea conocer las variables importantes en un lazo de control, y el procedimiento para su obtención es semejante al empleado para determinar una función de transferencia. Es importante tomar en cuenta que para simplificar el trazo de diagramas de bloques se debe tener cuidado en establecer adecuadamente las relaciones causa-efecto de una variable respecto a otra. Por lo general estas relaciones se dan de manera natural al plantear las ecuaciones diferenciales del comportamiento dinámico del sistema y obtener la transformada de Laplace con condiciones iniciales igualadas a cero, teniendo cuidado de que cada variable de interés aparezca solo una vez como efecto y que a su vez aparezca como causa en otras ecuaciones, podemos obtener un conjunto de ecuaciones como las que a continuación se ilustran:

$$\begin{array}{rcl}
 \text{Efecto} & & \text{causas} \\
 v_1 & = & t_{11}v_1 + t_{12}v_2 + \dots + t_{1n}v_n \\
 v_2 & = & t_{21}v_1 + t_{22}v_2 + \dots + t_{2n}v_n \\
 \vdots & & \\
 v_n & = & t_{n1}v_1 + t_{n2}v_2 + \dots + t_{nn}v_n
 \end{array} \tag{3.46}$$

donde:  $v_i =$  son las variables del diagrama a bloques.  
 $t_{ij} =$  son las funciones de transferencia que relacionan cada bloque.

Para trazar adecuadamente el diagrama a bloques, ya se mencionó que se sigue un procedimiento similar al usado para la obtención de la función de transferencia. En resumidas cuentas la mecánica es la siguiente:

1. Escribir las ecuaciones diferenciales que representan el comportamiento dinámico del sistema.
2. Tomar la transformada de Laplace de cada elemento con condiciones iniciales iguales a cero.
3. Representar cada elemento en un bloque.
4. Juntar todos los bloques individuales para formar el sistema completo.

Una vez obtenido el diagrama a bloques, es posible llegar a una forma mínima como la mostrada anteriormente en la figura 3.23 cuya función de transferencia adopta la forma general dada en la ecuación (3.39). La reducción de los diagramas de bloques a su mínima expresión es posible realizarla siguiendo dos reglas muy simples:

- 1.- El producto de las ganancias de los bloques ubicados en el camino directo debe permanecer constante.
- 2.- El producto de las ganancias de los bloques en el lazo de retroalimentación debe permanecer constante.

#### 4. METODO A SEGUIR:

- 4.1 Los alumnos analizan la función transferencia global de: Un estanque hidráulico con ingreso y egreso de agua, un termómetro de mercurio, un motor de corriente continua (**Mcc**), etc. Esto es, sistemas dinámicos cuya función transferencia puede ser de primer orden en atraso.
- 4.2 Los alumnos identifican el **tiempo de respuesta** y la **ganancia** de las funciones transferencias analizadas en el punto 4.1 y reconocen en ellas los elementos que definen el valor de dichos parámetros.
- 4.3 Los alumnos analizan la función transferencia global de: Un sistema masa-resorte-amortiguador, un calefactor eléctrico, un Mcc-resorte-volante, etc. Esto es, sistemas dinámicos cuya función transferencia puede ser de segundo orden en atraso
- 4.4 Los alumnos identifican la **frecuencia natural, el coeficiente de amortiguamiento y la ganancia** de las funciones transferencias presentes en el punto 4.3 y reconocen en ellas el vínculo existente entre el valor de los parámetros de la función transferencia y el de los elementos constitutivos de cada sistema.
- 4.5 Los sistemas antes modelados, (punto 4.1 y 4.3), son excitados mediante una perturbación escalón registrando el comportamiento dinámico de las respectivas variables de entrada y salida.
- 4.6 Los alumnos miden los atributos de interés de los elementos constitutivos de cada sistema antes citado y cuantifican el error presente en las mediciones realizadas.
- 4.7 Los alumnos evalúan los parámetros de cada función transferencia y los comparan con los resultados obtenidos experimentalmente.

#### 5.- VARIABLES A CONSIDERAR

- 5.1. Tiempo de respuesta y ganancia, (sistemas de primer orden).
- 5.2. Frecuencia natural, coeficiente de amortiguamiento y ganancia, (sistemas de segundo orden).

- 5.3 Parámetros de cada elemento o subsistema que conforman cada sistema dinámico analizado.

## **6.- TEMAS DE INTERROGACIÓN**

- 6.1. Función transferencia de sistemas de primer y segundo orden.
- 6.2. Respuesta dinámica de sistemas de primer y segundo orden frente a una perturbación de tipo escalón.
- 6.3 Errores en las mediciones y tratamiento de los mismos en la propagación del error.

## **7.- EQUIPOS E INSTRUMENTOS A UTILIZAR**

- 7.1 Osciloscopio.
- 7.2 Multitesters.
- 7.3 Fuente de poder cc con voltaje ajustable.
- 7.4 Fuentes en 5vcc, 12vcc, -12vcc
- 7.5 Mcc con tacogenerador incorporado, con y sin carga acoplada al eje del mismo.
- 7.6 Tacómetro.
- 7.7 Cronometro Casio resolución 1/1000seg
- 7.8 Pipeta Brand resolución 20ml, rango de 0 a 2000ml.
- 7.9 Huincha de medir Stanley de 3m resolución 1mm
- 7.10 pié de metro Mitutoyo, resolución 0.05mm.
- 7.11 Termómetro digital Fluye con transductor de superficie.
- 7.12 Calefactor eléctrico.
- 7.13 Termómetro de mercurio.

## **8. LO QUE SE PIDE EN EL INFORME:**

- 8.1 Las características técnicas de los equipos e instrumentos empleados en el laboratorio.
- 8.2 Especificar para cada sistema dinámico estudiado, la función transferencia correspondiente con la cuantificación de cada parámetro con su correspondiente error asociado.
- 8.3 Hacer una comparación entre los resultados experimentales y los obtenidos mediante los modelos matemáticos correspondientes.

- 8.4 Un análisis de los resultados obtenidos, tanto en las pruebas estáticas como dinámicas; comentarios y conclusiones personales.
- 8.5 La referencia bibliográfica.
- 8.8 El apéndice con:
- a.1. Un resumen con las ecuaciones de la respuesta en el tiempo de sistemas de primer y segundo orden ante una perturbación escalón.
  - a.2 Sensibilidad de la respuesta ante cambios en el valor de los parámetros de las correspondientes funciones transferencias, cuando la perturbación es de tipo escalón.
  - a.3. Desarrollo de los cálculos.
  - a.4. Presentación de resultados.
  - a.5. Gráficos.

## 9.- BIBLIOGRAFÍA

- Apuntes sesión de laboratorios de la asignatura de Automatización (15065). Profesor Héctor Muñoz R. DIMEC-USACH.
- Guías e informes de los laboratorios ATM-L02 Y ATM-L03.
- Ingeniería de Control Moderna. Katsuhiko Ogata. Cuarta Edición. Editorial Prentice Hall.