

A

Modelado de Sistemas Dinámicos

Este tema está dedicado al modelado de sistemas dinámicos. Esto es, a la obtención de un conjunto de ecuaciones matemáticas que describen el comportamiento de un sistema físico. No se estudia el modelado de todos los posibles sistemas físicos; tampoco el modelado pretende ser exhaustivo. La exposición se centra principalmente en el modelado de sistemas lineales, aunque en algún caso se considerarán modelos no lineales.

A.1 Introducción

El modelado de un sistema dinámico consta de tres fases:

- A partir de la utilidad que vaya a tener el modelo decídase qué señales son las de entrada o excitación, las de respuesta o salida, qué variables son internas, y cuáles son los parámetros (constantes) a tener en cuenta. Pueden dibujarse inicialmente bloques (sin ecuaciones matemáticas) que describen la interacción de las variables.
- Escribir las relaciones matemáticas que relacionan las variables de entrada y salida de cada elemento del conjunto.
- Añadir las ecuaciones que ligan unos elementos con otros. Obtener un modelo en espacio de estado o mediante funciones de transferencia del conjunto.

Este proceso se sigue muchas veces de forma inconsciente. Aquellos que están acostumbrados a trabajar, por ejemplo, con circuitos eléctricos pueden escribir directamente las ecuaciones del modelo.

En las secciones siguientes se presentan modelos de diversos sistemas físicos. La exposición no abarca todos los modelos dinámicos; no se incluyen, por ejemplo, modelos de población o modelos económicos.

Las ecuaciones que resultan del modelado de distintos sistemas tienen, a menudo, la misma forma, lo que hace posible el establecimiento de analogías. En este texto, sin embargo, no se hará un tratamiento amplio de analogías.

A.2 Sistemas Eléctricos

La obtención de modelos de sistemas eléctricos se va a tratar con cierto detalle, aunque se supone al lector cierta experiencia con análisis de circuitos en corriente continua y corriente alterna senoidal.

Las señales más utilizadas en el modelado de circuitos eléctricos son las tensiones $v(t)$ y las intensidades $i(t)$, aunque pueden considerarse flujos $\lambda(t)$, cargas $q(t)$, potencia $p(t)$, energía $w(t)$, etc.

Elementos pasivos lineales

En una *resistencia* (fig. A.1) de valor R la relación entre la tensión y la corriente es:

$$i_R(t) = \frac{v_R(t)}{R}$$

Alternativamente se puede considerar la conductancia $G = 1/R$, con lo que $i_R(t) = Gv_R(t)$.

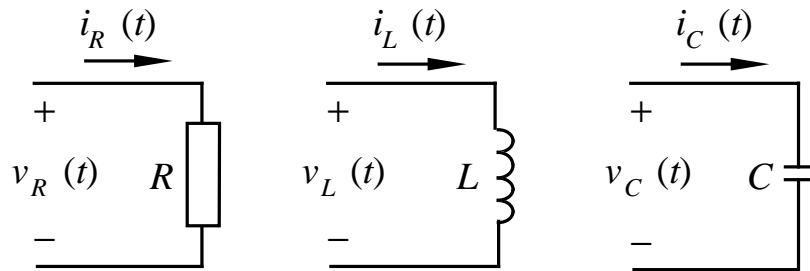


Figura A.1. Elementos pasivos

En una *bobina* lineal (no se considera la saturación) de coeficiente de autoinducción L la relación entre la tensión y la corriente es:

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt}$$

También puede ponerse:

$$i_L(t) = i_L(0) + \frac{1}{L} \int_0^t v_L(t) dt$$

En un *condensador* de capacidad C esta relación es:

$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt},$$

o bien:

$$v_C(t) = v_C(0) + \frac{1}{C} \int_0^t i_C(t) dt .$$

Notar la dualidad entre las ecuaciones de la bobina y el condensador.

En las ecuaciones anteriores no se ha distinguido entre condición inicial y valor inicial de la intensidad de la bobina y de la tensión en el condensador. Estas son variables que no pueden cambiar repentinamente salvo en casos muy especiales. La razón última es que no se puede cambiar instantáneamente la energía almacenada en un elemento salvo que se le aplique excitación infinita (tensión en un condensador, corriente en una bobina). Esto hace que en el planteamiento de las ecuaciones de un circuito sea conveniente tener en cuenta estas variables, aunque no sean las de interés o salidas.

Modelado y análisis de circuitos eléctricos

El modelado de un circuito eléctrico consiste en la descripción del mismo mediante una serie de ecuaciones diferenciales que ligen las tensiones e intensidades de interés (entradas, salidas, etc.).

Una vez que se dispone de las ecuaciones que describen cada uno de los elementos del circuito, la aplicación de las leyes de Kirchhoff permite escribir las ecuaciones diferenciales.

Se supone al lector familiaridad con estas leyes, así como con otras herramientas útiles: análisis en régimen permanente de circuitos en c.c. y en c.a. senoidal, métodos de mallas y nudos, principio de superposición para circuitos lineales, etc.

Ejemplo A.1 (Régimen permanente de c.c.) Considérese el circuito de la figura A.5. Los valores de los elementos son: $R = 40\Omega$, $L = 0,1\text{H}$ y $C = 10\mu\text{F}$. Si se aplica una tensión continua $v(t) = V = 10\text{V}$, la bobina es como un cortocircuito y el condensador es como un circuito abierto. Se tienen, inmediatamente, los siguientes resultados:

$$V_L = 0, \quad I_C = 0, \quad V_R = V_C = V = 10\text{V}, \quad I_L = I_R = \frac{10}{40} = 250\text{mA} . \quad \blacksquare$$

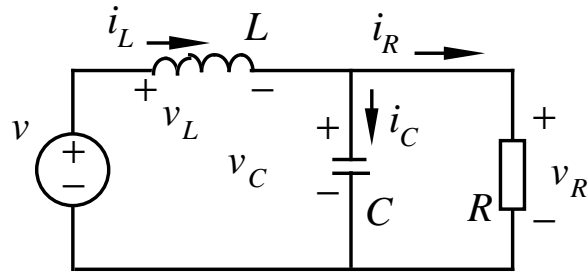


Figura A.5. Circuito utilizado como ejemplo.

Ejemplo A.2 (Régimen permanente de c.a.) Considérese el mismo circuito que en el ejemplo anterior, pero ahora la tensión es $v(t) = V_M \text{sen}(\omega t)$, con $V_M = 10 \text{ V}$ y $\omega = 1000 \text{ rad/s}$. Se pretende calcular la corriente por la resistencia. La impedancia “vista” por la fuente es:

$$\bar{Z} = (j\omega L) + R \left\| \left(\frac{1}{j\omega C} \right) \right. = 0,0928 \text{ k}\Omega e^{j68,2^\circ} .$$

De donde, la corriente por la bobina y por la resistencia son:

$$I_L = \frac{V}{Z} = 107,7 \text{ mA } e^{-j68,2^\circ}$$

$$I_R = I_L \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R + \frac{1}{j\omega C}} = 100 \text{ mA } e^{-j90^\circ}$$

En función del tiempo, $i_R(t) = 100 \text{ sen}(1000t - 90^\circ) = -100 \text{ cos}(1000t)$. ■

Ejemplo A.3 (Modelado de un circuito eléctrico). Considérese de nuevo el mismo circuito. Se aplica una tensión $v(t)$ (entrada) y se pretende conocer la tensión en la resistencia $v_R(t)$ (salida). Aplicando las ley de Kirchhoff de tensiones:

$$v = v_L + v_C, \quad v_R = v_C .$$

Y la de intensidades:

$$i_L = i_R + i_C .$$

Teniendo en cuenta las relaciones:

$$v_L = L \frac{di_L}{dt}, \quad i_C = C \frac{dv_C}{dt}, \quad v_R = Ri_R$$

Se llega a las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$i_L = C \frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{R}, \quad L \frac{di_L}{dt} + v_C = v.$$

donde $v_R(t) = v_C(t)$.

La solución del problema, conocida la tensión de entrada $v(t)$ y unas condiciones iniciales $i_L(0)$ y $v_C(0)$ puede abordarse de distintas formas. Puede resolverse el sistema de ecuaciones diferenciales con técnicas clásicas. Puede tomarse transformada de Laplace en las dos ecuaciones y despejar la variable de interés del sistema de ecuaciones algebraicas resultante. Aunque no es necesario en todos los análisis, pueden obtenerse la ecuación diferencial que resulta de eliminar una entre las dos:

$$LC \frac{dv_C}{dt} + \frac{L}{R} \frac{dv_C}{dt} + v_C = v.$$

donde las condiciones iniciales son $v_C(0)$ y $\dot{v}_C(0) = i_L(0)/C - v_C(0)/(RC)$. ■

Naturalmente, la solución en c.c. o en c.a. senoidal del circuito también puede hacerse a partir de las ecuaciones diferenciales. En el primer caso basta con hacer cero las derivadas. En el segundo hay que suponer una solución para la tensión en el condensador (en la resistencia) de la forma $V_R \text{sen}(\omega t - \phi)$.

Cálculo operacional

Un circuito eléctrico lineal está descrito por ecuaciones diferenciales lineales de coeficientes constantes, que pueden ser resueltas mediante la aplicación de la transformada de Laplace.

Ejemplo A.4 (Transformada de Laplace). Considérese de nuevo el mismo circuito del ejemplo A.1. Las ecuaciones diferenciales que describen el circuito son:

$$i_L = C \frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{R}, \quad L \frac{di_L}{dt} + v_C = v.$$

Tomando transformada de Laplace:

$$I_L = (sC + \frac{1}{R})V_C - Cv_C(0), \quad sLI_L - Li_L(0) + V_C = V.$$

de donde:

$$V_C = \frac{1}{LCs^2 + (L/R)s + 1} V + \frac{sLCv_C(0) + Li_L(0)}{LCs^2 + (L/R)s + 1}.$$

Con condiciones iniciales nulas, los valores utilizados en el ejemplo A.1 y $v(t)$ en forma de escalón de 10V de amplitud se tiene:

$$V_C = \frac{1}{(s+2)(s+0,5)} \frac{10}{s} \rightarrow v_C(t) = 10\left(1 - \frac{4}{3}e^{-0,5t} + \frac{1}{3}e^{-2t}\right).$$

En régimen permanente la solución es la misma que la del ejemplo A.1. ■

Alternativamente, puede aplicarse el denominado *cálculo operacional*. Consiste en redibujar el circuito utilizando las *impedancias operacionales* y escribir directamente las ecuaciones en variable de Laplace. En estos circuitos se pueden tener en cuenta también las condiciones iniciales, como se verá más adelante. La impedancia operacional de un elemento pasivo es la relación entre la transformada de la tensión aplicada y la transformada de la intensidad que circula:

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I(s)}.$$

Para una resistencia se tiene:

$$i_R(t) = \frac{v_R(t)}{R} \rightarrow I_R(s) = \frac{V_R(s)}{R},$$

la impedancia operacional es precisamente R .

Para una bobina la impedancia operacional es sL :

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \rightarrow V_L(s) = (sL)I_L(s).$$

Para un condensador es $1/sC$:

$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} \rightarrow I_C(s) = (sC)V_C(s).$$

En el caso de bobina y condensador se llega a las mismas ecuaciones si se parte de la ecuación integral del elemento. Se deja como ejercicio.

Ejemplo A.5 (Impedancias operacionales). Considérese de nuevo el mismo circuito. En la figura A.6 se presenta el circuito con impedancias operacionales. Las ecuaciones de este circuito son:

$$V(s) = V_L(s) + V_C(s) = sLI_L(s) + V_C(s)$$

$$I_L(s) = I_R(s) + I_C(s) = \frac{V_C(s)}{R} + sCV_C(s)$$

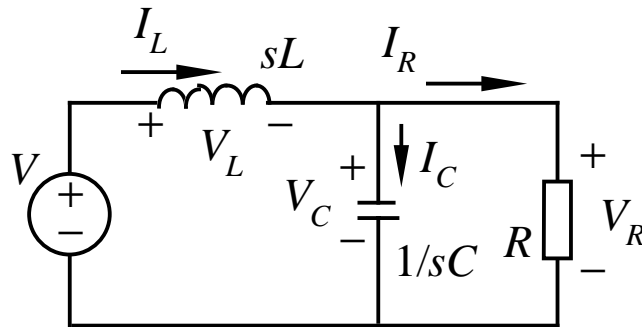


Figura A.6. Circuito con impedancias operacionales.

Eliminando la intensidad en la bobina se tiene:

$$V_C(s) = \frac{1}{LCs^2 + (L/R)s + 1} V(s). \quad \blacksquare$$

Condiciones iniciales no nulas

El cálculo operacional se puede extender al caso de condiciones iniciales no nulas. Las condiciones iniciales pueden representarse en el circuito como generadores. Recordar que en un circuito lineal puede aplicarse el principio de superposición; una tensión o una corriente puede determinarse como la suma de los efectos de las entradas más el efecto de las condiciones iniciales.

Como las condiciones iniciales habitualmente conocidas son las tensiones en los condensadores y corrientes en las bobinas, que no pueden cambiar instantáneamente al representar la energía almacenada en el circuito, no se distinguirá entre valores en 0^- y valores en 0^+ .

Para un condensador, teniendo en cuenta las condiciones iniciales:

$$i_C(t) = C \frac{dv_C(t)}{dt} \quad \rightarrow \quad I_C(s) = sCV_C(s) - Cv_C(0).$$

Esta ecuación permite representar un condensador en un circuito como una impedancia $1/sC$ en paralelo con una fuente de intensidad $Cv_C(0)$. Alternativamente, escribiendo la ecuación como:

$$V_C(s) = \frac{1}{sC} I_C(s) + \frac{v_C(0)}{s},$$

permite representar un condensador en un circuito como una impedancia $1/sC$ en serie con una fuente de tensión $v_C(0)/s$.

Para una bobina, teniendo en cuenta las condiciones iniciales:

$$v_L(t) = L \frac{di_L(t)}{dt} \quad \rightarrow \quad V_L(s) = sLI_L(s) - Li_L(0).$$

Esta ecuación permite representar la bobina como una impedancia sL en serie con una fuente de tensión $Li_L(0)$. Alternativamente, escribiendo la ecuación como:

$$I_L(s) = \frac{1}{sL} V_L(s) + \frac{i_L(0)}{s},$$

permite representar la bobina como una impedancia sL en paralelo con una fuente de corriente $i_L(0)/s$.

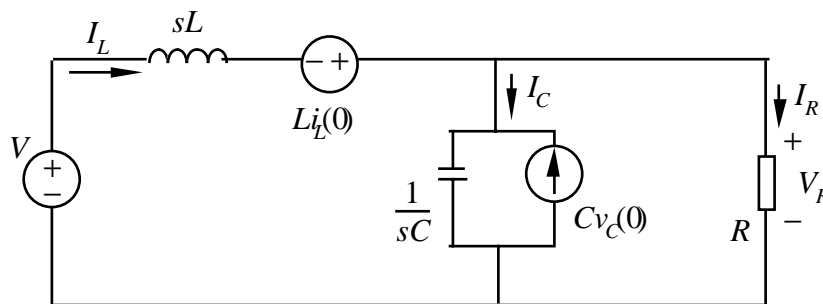


Figura A.7. Circuito con impedancias operacionales y “generadores de condiciones iniciales”.

Ejemplo A.6 (Condiciones iniciales no nulas). Considérese de nuevo el mismo circuito del ejemplo A.5, pero con condiciones iniciales no nulas en la corriente en la bobina y en la tensión del condensador. En la figura A.7 se presenta el circuito con impedancias operacionales y generadores para tener en cuenta las condiciones iniciales. La tensión en la resistencia (o en el condensador) puede determinarse aplicando el principio de superposición:

$$\begin{aligned} V_C(s) &= \frac{V(s) + Li_L(0)}{LCs^2 + (L/R)s + 1} + Cv_C(0)R \frac{(sL) // (1/sC)}{(sL) // (1/sC) + R} \\ &= \frac{V(s) + sLCv_C(0) + Li_L(0)}{LCs^2 + (L/R)s + 1} \end{aligned}$$

El mismo resultado que se obtuvo en el ejemplo A.4. ■

Diagramas de bloques

Las ecuaciones de los circuitos se pueden representar en diagramas de bloques. Los bloques de integración ($1/s$) permiten representar mejor la física del problema y permiten “visualizar” las condiciones iniciales en los diagramas. En efecto, en una bobina la intensidad es una constante por la integral de la tensión aplicada y en un condensador la tensión es una constante por la integral de la intensidad que circula. Las condiciones

iniciales son los valores que tendrán inicialmente las salidas de los integradores.

Ejemplo A.7 (Diagramas de bloques). Considérese de nuevo el circuito que se ha venido usando. Las ecuaciones diferenciales que describen su funcionamiento son:

$$i_L = C \frac{dv_C}{dt} + \frac{v_C}{R}, \quad L \frac{di_L}{dt} + v_C = v.$$

A partir de estas ecuaciones, o de las ecuaciones transformadas, puede construirse el diagrama de bloques de la figura A.8. Las funciones de transferencia puede obtenerse ahora, si se desea, empleando álgebra de bloques, en vez de álgebra convencional. ■

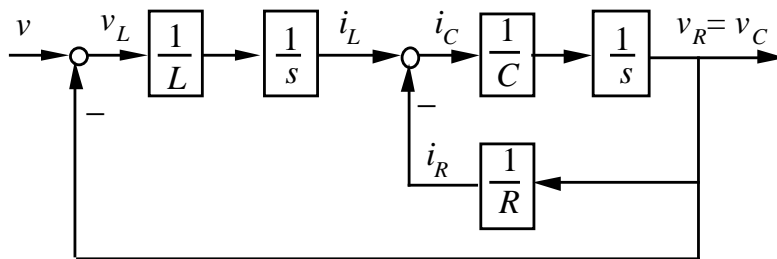


Figura A.8. Diagrama de bloques del circuito de la figura A.4.

A.3 Sistemas Mecánicos

En los sistemas mecánicos las fuerzas, desplazamientos y velocidades son las variables comúnmente encontradas. La ecuación fundamental es la 2ª ley de Newton:

$$\vec{f}(t) = M\vec{a}(t) = M \frac{d\vec{x}(t)}{dt}$$

que indica que la suma de fuerzas que actúan sobre un cuerpo es igual al producto de su masa por la aceleración.

Sistemas con Desplazamiento Lineal

Para simplificar la exposición se considerarán sólo desplazamientos lineales en línea recta.

Ejemplo A.10 (Sistema con masa y rozamiento viscoso). Considérese una masa M situada sobre una superficie horizontal sobre la que actúa una fuerza exterior $f(t)$. El rozamiento de la masa con la superficie da lugar a otra fuerza

que se opone al desplazamiento y se supondrá proporcional a la velocidad con constante de proporcionalidad B . La aplicación de la ley de Newton da:

$$f(t) - B \frac{dx}{dt} = M \frac{d^2x}{dt^2}$$

Si se conoce la fuerza aplicada $f(t)$, y las condiciones iniciales (posición y velocidad) puede determinarse la posición $x(t)$ en cualquier instante. Las derivadas sucesivas darán la velocidad y la aceleración. ■

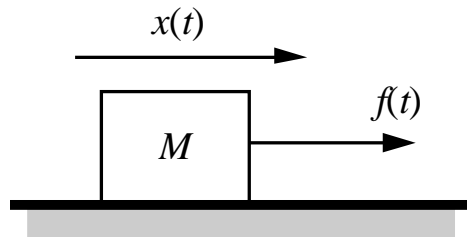


Figura A.11. Ejemplo de sistema mecánico con desplazamiento lineal.

Ejemplo A.11 (Sistema con fuerzas elásticas). Considérese un sistema parecido al anterior (fig. A.12). Una fuerza exterior $f(t)$ actúa sobre una masa M unida a una pared con un muelle elástico. El muelle presenta una fuerza que se opone al desplazamiento y que puede suponerse proporcional a la elongación con constante de proporcionalidad K . El rozamiento de la masa con la superficie da lugar a otra fuerza que se opone al desplazamiento y que puede suponerse proporcional a la velocidad con constante de proporcionalidad B . La aplicación de la ley de Newton da:

$$f(t) - B \frac{dx}{dt} - Kx = M \frac{d^2x}{dt^2}$$

Como en el caso anterior, si se conoce la fuerza aplicada $f(t)$, y las condiciones iniciales (posición y velocidad) puede determinarse la posición $x(t)$ en cualquier instante. Las derivadas sucesivas darán la velocidad y la aceleración. Las ecuaciones de este sistema pueden representarse en el diagrama de bloques de la figura A.13 ■

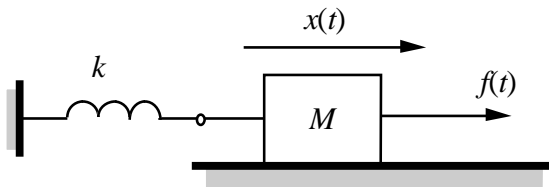


Figura A.12. Ejemplo de sistema mecánico con desplazamiento lineal.

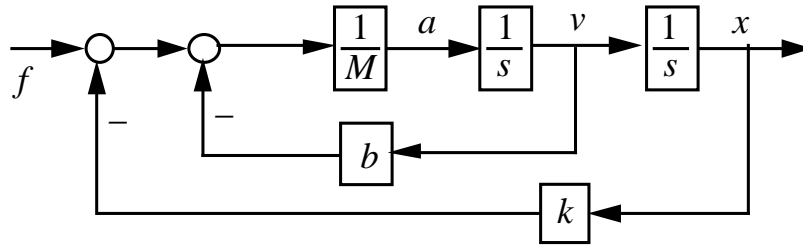


Figura A.13. Diagrama de bloques del sistema de la figura A.12.

Desplazamiento Angular

Para sistemas con desplazamiento angular en una dimensión la ley de Newton se modifica; el par neto es igual al momento de inercia multiplicado por la aceleración angular:

$$m(t) = J\alpha(t) = J \frac{d\omega}{dt} = J \frac{d^2\theta}{dt^2},$$

donde $m(t)$ es el par aplicado, J el momento de inercia, y $\{\theta, \omega, \alpha\}$ la posición, velocidad y aceleración angulares, respectivamente. En estos sistemas puede haber también pares resistentes debidos a la elasticidad de los ejes y al rozamiento.

Ejemplo A.13 (Sistema de transmisión con ruedas). Considérese el sistema de la figura A.15. Sobre un eje 1 se aplica un par $m_1(t)$ haciéndolo girar a una velocidad $\omega_1(t)$. Está acoplado a otro eje 2 a través de dos ruedas de radios r_1 y r_2 , que ruedan sin deslizar (es lo mismo que dos ruedas dentadas con números de dientes N_1 y N_2 , siempre que $r_1/r_2 = N_1/N_2$). En este segundo eje hay una carga que tiene un momento de inercia J y sobre el que actúa un par resistente (de carga) m_L . Además sobre el tambor hay un par de rozamiento viscoso proporcional a la velocidad, con constante de proporcionalidad B .

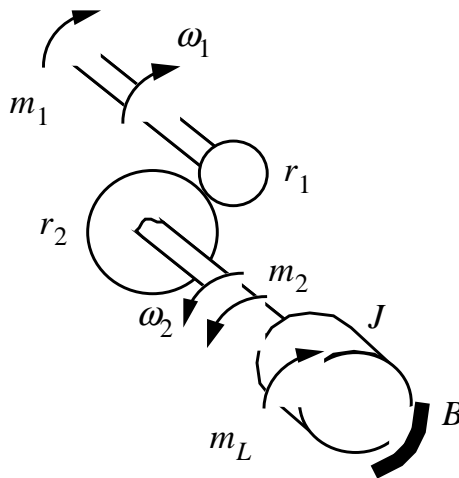


Figura A.15. Sistema de transmisión con ruedas.

En las ruedas se conserva la potencia (par×velocidad angular) de forma que se tiene la relación:

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{m_2(t)}{m_1(t)} = \frac{\omega_1(t)}{\omega_2(t)} = \frac{\theta_1(t)}{\theta_2(t)}$$

donde $m_2(t)$ es el par aplicado en el eje 1 “visto” en el eje 2 y θ_1 y θ_2 los ángulos girados por cada uno de ellos. Como:

$$m_2(t) = J \frac{d\omega_2}{dt} + B\omega_2 + m_L,$$

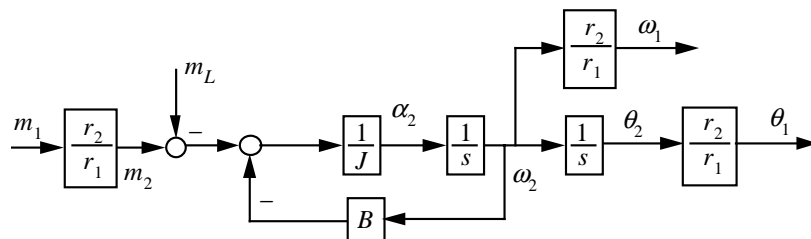


Figura A.16. Diagrama de bloques del sistema de transmisión con ruedas.

puede dibujarse el diagrama de bloques de la figura A.16. De este diagrama se obtienen, en función del par aplicado y del par de carga, las velocidades y posiciones de ambos ejes, para unas condiciones iniciales de posición y velocidad dadas. ■

A.4 Sistemas Térmicos

En los sistemas térmicos las señales comúnmente empleadas son la temperatura T (a veces se manejan diferencias o gradientes de temperatura) y las potencias $p(t)$ (flujo de calor por unidad de tiempo).

El modelado es en principio complicado, ya que la temperatura no suele ser homogénea en los cuerpos, lo que dará lugar a ecuaciones diferenciales en derivadas parciales y, por lo tanto, a modelos de parámetros distribuidos. Se suele simplificar en muchos casos dividiendo el cuerpo en varias partes, o considerando una sola, suponiendo temperatura homogénea. Así se obtienen ecuaciones diferenciales ordinarias y, por lo tanto, modelos de parámetros concentrados.

El calor puede fluir por conducción, por convección y por radiación. El primer fenómeno es prácticamente lineal, el flujo de calor es proporcional a la diferencias de temperaturas. La convección es debida al flujo, sobre la superficie del cuerpo de sustancias gaseosas o líquidas. La refrigeración de semiconductores en pequeñas potencias se realiza principalmente por convección de aire. En transformadores de potencias elevadas la refrigeración se hace por aceite. La convección no es estrictamente un fenómeno lineal, aunque puede suponerse así en márgenes discretos de temperaturas. La radiación es un fenómeno no lineal, depende de T^4 .

La *resistencia térmica* R (K/W o °C/W) es un parámetro utilizado en conducción y, linealizando (para pequeñas variaciones), en convección y radiación. Es la relación entre el flujo de calor por unidad de tiempo evacuada a través de un conductor térmico y el gradiente de temperaturas:

$$p(t) = \frac{T_1(t) - T_2(t)}{R} = \frac{\Delta T(t)}{R}.$$

Cuanto mayor es la resistencia menor es el flujo de calor para igual salto térmico.

La *capacidad térmica* C (J/K o J/°C) de un cuerpo es la cantidad de calor que hay que darle para aumentar su temperatura un grado. Es decir:

$$T(t) = T(0) + \frac{1}{C} \int_0^t p(t) dt.$$

Ejemplo A.14 (Calentamiento de un cuerpo). El calentamiento de un horno, de una máquina eléctrica o de un componente electrónico se suele modelar, en primera aproximación con un modelo muy sencillo que supone temperatura homogénea. En un punto del cuerpo se genera¹ una potencia

¹ En el caso de un horno es la potencia dada a la resistencia calefactora. En el caso de una máquina eléctrica o de un componente electrónico es la potencia perdida (no deseada) en la conducción de la energía eléctrica.

calorífica P de la que parte se emplea en calentar el cuerpo P_c , y parte fluye hacia el exterior P_f . Si el cuerpo tiene una capacidad térmica C y una resistencia térmica R , T es su temperatura y T_e la temperatura exterior, se tiene el modelo que se da en la figura A.17 en forma de diagrama de bloques. Es un modelo lineal descrito por:

$$C \frac{dT}{dt} = p_c = p - p_f = p - \frac{T - T_e}{R}$$

Queda como ejercicio la determinación de la función de transferencia. ■

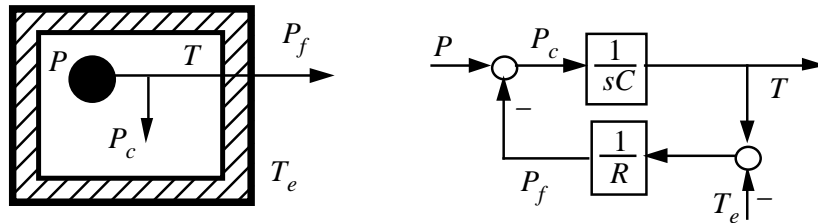


Figura A.17. Diagrama simbólico del sistema de calentamiento (izqda.) y diagrama de bloques mostrando las variables y parámetros de interés (dcha.).

A.5 Sistemas Hidráulicos

En un sistema hidráulico las variables normalmente encontradas son niveles, caudales, presión, velocidad, etc. El siguiente ejemplo muestra el modelado de un depósito de líquidos.

Ejemplo A.15 (Modelado de un depósito) Un gran depósito de agua de sección constante A [m²], y altura H_{max} [m] (fig. A.18(a)), tiene un orificio en el fondo de área a [m²]. En el depósito entra una caudal $q(t)$ [m³/s]. La velocidad de salida del agua a través del orificio del fondo es $v = \sqrt{2gh}$, donde h es el nivel del agua y g es la aceleración de la gravedad. Por lo tanto el caudal de salida es av y la ecuación que define el sistema (fig. A.18(b)), es:

$$A \frac{dh(t)}{dt} = q(t) - a\sqrt{2gh(t)}$$

Es decir, la variación del volumen del depósito es igual al caudal de entrada menos el caudal de salida. Este es un sistema no lineal, ya que en la ecuación diferencial aparece la raíz cuadrada de la variable dependiente.

Si el caudal de entrada es constante $q(t) = Q$, se alcanza un punto de equilibrio que corresponde a $Q = a\sqrt{2gH}$, donde H es el nivel constante que alcanzará el agua. Linealizando el modelo en un entorno de este punto de equilibrio se tiene el siguiente modelo lineal de primer orden:

$$A \frac{d\tilde{h}(t)}{dt} = \tilde{q}(t) - \frac{a^2 g}{Q} \tilde{h}(t)$$

■

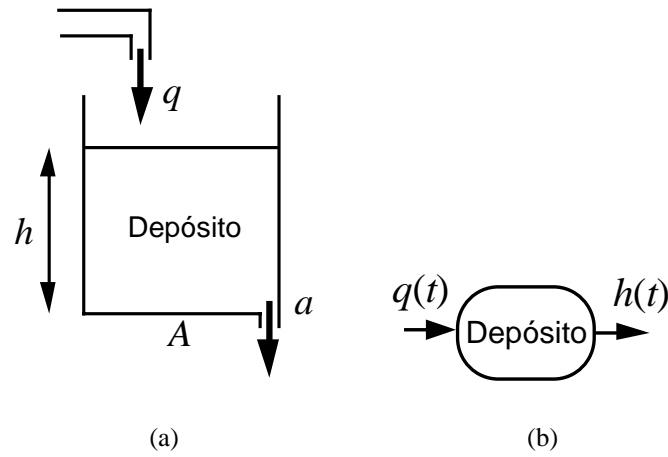


Figura A.18. Ejemplo de modelado de un depósito. (a) Diagrama de funcionamiento. (b) Diagrama de bloques mostrando las variables de entrada y de salida.