UNIVERSIDAD SIMÓN BOLÍVAR
Departamento de Procesos y Sistemas

MODELAJE DE SISTEMAS MECÁNICOS ROTACIONALES

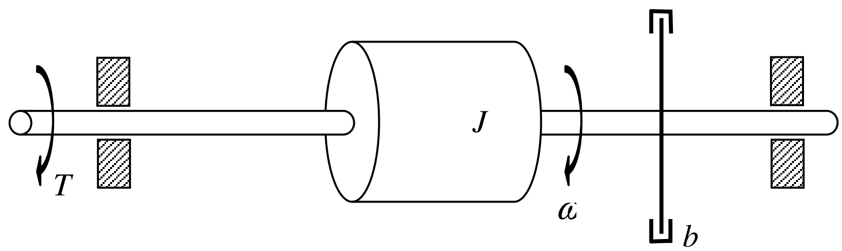
Prof. Alexander Hoyo

Junio 2010
Caracas, Venezuela

ÍNDICE

SISTEMA MECÁNICO ROTACIONAL

El sistema consiste en una carga inercial y un amortiguador de fricción viscosa.



La segunda ley de Newton establece que:

$$J\alpha = \sum T$$

J → Momento de Inercia de la carga [kg-m^2]
α → Aceleración angular de la carga [rad/s^2]
T→ Par aplicado al sistema [N-m]

Entonces:

$$J\dot{\omega} = -b\omega + T$$

b → Coeficiente de fricción viscosa [N-m/rad/s]
ω → Velocidad angular [rad/s]

La función de transferencia resulta en:

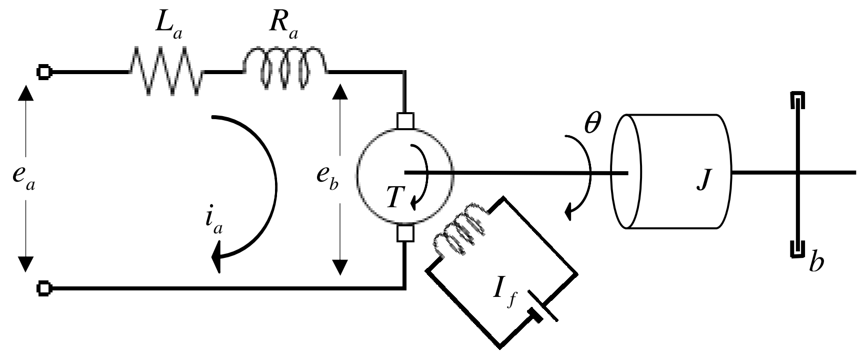
$$\frac{\Omega(s)}{T(s)} = \frac{1}{Js+b}$$

Donde: $\Omega(s)$ y $T(s)$ son las transformadas de Laplace de la salida (velocidad angular ω) y de la entrada (par *T* aplicado).

Ejercicio:

Obtener la función de transferencia $\frac{\Theta(s)}{T(s)}$ donde $\Theta(s)$ es el desplazamiento angular en radianes de la carga.

SERVOMOTOR DE CD CONTROLADO POR ARMADURA



El par electromagnético del motor es:

$$T = \left(\frac{ZNP}{a\pi}\right)\Phi_P i_a$$

En el devanado de la armadura:

Z → Número de bobinas
N → Número de vueltas por bobinas
a → Número de trayectorias de corrientes paralelas
P → Número de polos
Φ_P → Flujo por polo
i_a → Corriente de armadura

Simplificando se puede decir que:

$$K_1 \stackrel{\Delta}{=} \left(\frac{ZNP}{a\pi}\right)$$

El flujo Φ_P puede expresarse como:

$$\Phi_P = \frac{N_f}{R_f} i_f \stackrel{\Delta}{=} K_f i_f \qquad K_f \stackrel{\Delta}{=} \frac{N_f}{R_f}$$

i_f → Corriente de campo
N_f → Número de vueltas
R_f → Reluctancia de la trayectoria del flujo Φ_P

Entonces el par electromagnético en el motor se puede expresar como:

$$T = K_1 \cdot K_f \cdot i_f \cdot i_a$$

En un motor de CD con excitación independiente, la corriente de campo i_f es constante I_f y el par se puede expresar como:

$$T = K \cdot i_a \qquad (1)$$

$K = K_1 \cdot K_f \cdot I_f$ → Constante del par motriz

De la ec. (1) se observa que si el signo de la corriente de armadura se invierte, el signo del par *T* también se invierte, lo que indica un cambio en el sentido de rotación del eje del motor.

Del circuito de armadura se tiene:

$$L_a \frac{di_a}{dt} + R_a i_a + e_b = e_a \qquad (2)$$

L_a → Inductancia de la armadura [H]
R_a → Resistencia de la armadura [Ω]
e_a → Voltaje aplicado a la armadura [V]
e_b → Fuerza contra-electromotriz [V]

Cuando la armadura está girando, se induce en ella un voltaje proporcional al producto del flujo por la velocidad angular. Como el flujo es constante, el voltaje inducido es directamente proporcional a la velocidad angular.

$$e_b = K_b \frac{d\theta}{dt} \qquad (3)$$

θ → Desplazamiento angular del eje del motor [rad]

Aplicando la segunda ley de Newton se tiene que:

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} = T - b \frac{d\theta}{dt} \qquad (4)$$

J → Momento de inercia equivalente del motor y la carga con referencia al eje del motor [kg-m^2]
b → Coeficiente de fricción viscosa del motor y la carga referido al eje del motor [N-m/rad/s]
Reescribiendo la ec. (4) e introduciendo la ec. (1) se tiene:

$$J \frac{d^2\theta}{dt^2} + b \frac{d\theta}{dt} = T = K \cdot i_a \qquad (5)$$

Tomando las transformadas de Laplace de las ec. (2), (3) y (5) se tiene:

$$L_a s I_a(s) + R_a I_a(s) + K_b s \Theta(s) = E_a(s) \qquad (6)$$

$$Js^2\Theta(s) + bs\Theta(s) = KI_a(s) \qquad (7)$$

Sustituyendo $I_a(s)$ de ec. (7) en la ec. (6) se tiene:

$$(L_a s + R_a)I_a(s) + K_b s\Theta(s) = E_a(s)$$
$$(L_a s + R_a)\left(\frac{Js^2 + bs}{K}\right)\Theta(s) + K_b s\Theta(s) = E_a(s)$$
$$\left[(L_a s + R_a)\left(\frac{Js^2 + bs}{K}\right) + K_b s\right]\Theta(s) = E_a(s)$$
$$\left[(L_a s + R_a)(Js^2 + bs) + KK_b s\right]\Theta(s) = KE_a(s)$$

$$\Rightarrow \frac{\Theta(s)}{E_a(s)} = \frac{K}{s[L_a Js^2 + (L_a b + R_a J)s + R_a b + KK_b]}$$

Ejercicio:

Obtener la función de transferencia $\Omega(s)/E_a(s)$ donde $\Omega(s)$ es la transformada de Laplace de la velocidad angular del eje del motor.

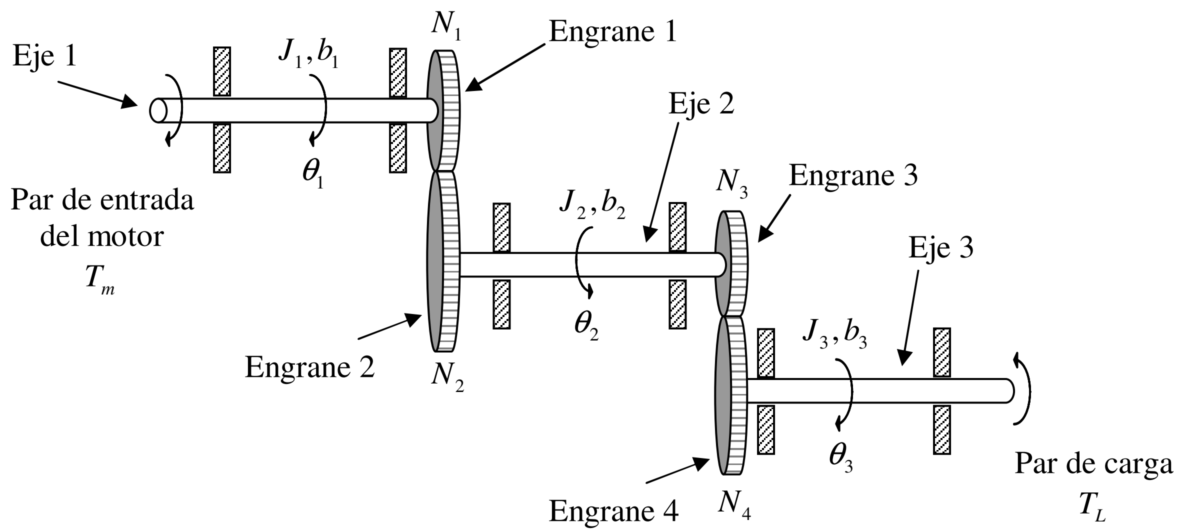
$\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$ → Velocidad angular del eje del motor.

Respuesta: $\dfrac{\Omega(s)}{E_a(s)} = \dfrac{K}{(L_a s + R_a)(Js + b) + KK_b}$

ENGRANES

Los engranes se utilizan para reducir o aumentar la velocidad y/o pares u obtener la mejor transferencia de potencia al acoplar alguna carga a un elemento motriz a través de un o varios engranes.

Suponiendo que los ejes poseen rigidez infinita y que la cantidad de dientes en cada engrane es proporcional al radio de los mismos.



La cantidad de dientes de cada engrane es N_1, N_2, N_3 y N_4 respectivamente. Los θ_1, θ_2 y θ_3 representan el desplazamiento angular de cada eje.

$$\theta_2 N_2 = \theta_1 N_1 \Rightarrow \frac{\theta_2}{\theta_1} = \frac{N_1}{N_2} \qquad \theta_3 N_4 = \theta_2 N_3 \Rightarrow \frac{\theta_3}{\theta_2} = \frac{N_3}{N_4}$$

Los momentos de inercia y los coeficientes de fricción viscosa de cada componente del sistema de engranes se denominan J_1, b_1; J_2, b_2 y J_3, b_3 respectivamente.

J_3, b_3 incluyen el momento de inercia y el coeficiente de fricción viscosa de la carga.

Para el **eje 1** se tiene la siguiente ecuación:

$$J_1 \ddot{\theta}_1 = T_m - b_1 \dot{\theta}_1 - T_1 \qquad (8)$$

T_m → Par desarrollado por el motor
T_1 → Par de la carga en el engrane 1 debido al resto de los engranes

Para el **eje 2** se tiene la siguiente ecuación:

$$J_2\ddot{\theta}_2 = T_2 - b_2\dot{\theta}_2 - T_3 \qquad (9)$$

T_2 → Par transmitido al engrane 2
T_3 → Par de la carga en el engrane 3 debido al resto de los engranes

Como el trabajo realizado por el engrane 1 es igual al trabajo realizado por el engrane 2 se tiene:

$$T_1\theta_1 = T_2\theta_2$$

$$T_2 = T_1\frac{\theta_1}{\theta_2} = T_1\frac{N_2}{N_1}$$

Si $N_1/N_2 < 1$ la relación de engranes reduce la velocidad, al tiempo que amplifica el par.

Para el **eje 3** se tiene la siguiente ecuación:

$$J_3\ddot{\theta}_3 = T_4 - b_3\dot{\theta}_3 - T_L \qquad (10)$$

T_4 → Par transmitido al engrane 4
T_L → Par de la carga

Como el trabajo realizado por el engrane 3 es igual al trabajo realizado por el engrane 4 se tiene:

$$T_3\theta_2 = T_4\theta_3$$

$$T_4 = T_3\frac{\theta_2}{\theta_3} = T_3\frac{N_4}{N_3}$$

Reescribiendo la ec. (10) se tiene:

$$J_3\ddot{\theta}_3 + b_3\dot{\theta}_3 + T_L = T_4 \qquad (11)$$

Reescribiendo la ec. (9) sabiendo que $T_4 = T_3\frac{N_4}{N_3}$ resulta en:

$$J_2\ddot{\theta}_2 + b_2\dot{\theta}_2 + T_4\frac{N_3}{N_4} = T_2 \qquad (12)$$

Sustituyendo T_4 de la ec. (11) en la ec. (12):

$$J_2\ddot{\theta}_2+b_2\dot{\theta}_2+\frac{N_3}{N_4}\left(J_3\ddot{\theta}_3+b_3\dot{\theta}_3+T_L\right)=T_2 \qquad (13)$$

Reescribiendo la ec. (8) sabiendo que $T_2=T_1\frac{N_2}{N_1}$ resulta en:

$$J_1\ddot{\theta}_1+b_1\dot{\theta}_1+T_2\frac{N_1}{N_2}=T_m \qquad (14)$$

Sustituyendo T_2 de la ec. (13) en la ec. (14):

$$J_1\ddot{\theta}_1+b_1\dot{\theta}_1+\frac{N_1}{N_2}\left[J_2\ddot{\theta}_2+b_2\dot{\theta}_2+\frac{N_3}{N_4}\left(J_3\ddot{\theta}_3+b_3\dot{\theta}_3+T_L\right)\right]=T_m$$

Ó

$$J_1\ddot{\theta}_1+b_1\dot{\theta}_1+\frac{N_1}{N_2}\left(J_2\ddot{\theta}_2+b_2\dot{\theta}_2\right)+\frac{N_1}{N_2}\frac{N_3}{N_4}\left(J_3\ddot{\theta}_3+b_3\dot{\theta}_3+T_L\right)=T_m \qquad (15)$$

Además, como $\frac{\theta_2}{\theta_1}=\frac{N_1}{N_2}$ y $\frac{\theta_3}{\theta_2}=\frac{N_3}{N_4}$, entonces:

$$\theta_3=\theta_2\frac{N_3}{N_4}=\theta_1\frac{N_3}{N_4}\frac{N_1}{N_2}$$

La ec. (15) se puede reescribir como en función de θ_1:

$$\left[J_1+\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 J_2+\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2\left(\frac{N_3}{N_4}\right)^2 J_3\right]\ddot{\theta}_1+\left[b_1+\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 b_2+\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2\left(\frac{N_3}{N_4}\right)^2 b_3\right]\dot{\theta}_1+\frac{N_1}{N_2}\frac{N_3}{N_4}T_L=T_m \qquad (16)$$

El momento de inercia y el coeficiente de fricción viscosa del sistema de engranes referido al eje 1 son equivalentes a las siguientes expresiones:

$$J_{1eq}=J_1+\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 J_2+\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2\left(\frac{N_3}{N_4}\right)^2 J_3$$

$$b1eq=b_1+\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2 b_2+\left(\frac{N_1}{N_2}\right)^2\left(\frac{N_3}{N_4}\right)^2 b_3$$

Por lo que se puede escribir la ec. (16) de la siguiente forma, asumiendo $n=\frac{N_1}{N_2}\frac{N_3}{N_4}$

$$J_{1eq}\ddot{\theta}_1+b_{1eq}\dot{\theta}_1+nT_L=T_m \qquad (17)$$

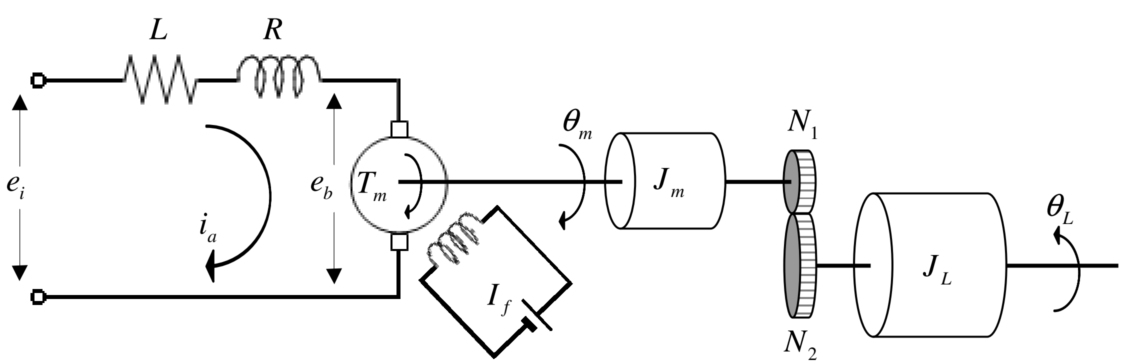
SERVOMOTOR DC CON CARGA ACOPLADA MEDIANTE ENGRANES

Considere el sistema, un servomotor de cd controlado por armadura que excita una carga consistente en un momento de inercia J_L. El par desarrollado por el motor es T_m.

El desplazamiento angular del rotor del motor y el elemento de carga son θ_m y θ_L respectivamente.

Los coeficientes de fricción viscosa de del eje del motor y el de carga son b_m y b_L respectivamente.

La relación de engranes es $\dfrac{\theta_L}{\theta_m} = n$



Para el eje del motor se tiene la siguiente ecuación:

$$J_m \ddot{\theta}_m = T_m - b_m \dot{\theta}_m - T_1 \qquad (18)$$

Donde el T_1 es el par de la carga en el engrane 1. Para el eje de la carga la ecuación resulta en:

$$J_L \ddot{\theta}_L = T_L - b_L \dot{\theta}_L$$

$$J_L \ddot{\theta}_L + b_L \dot{\theta}_L = T_L \qquad (19)$$

Como el trabajo realizado en el engrane 1 es igual en el engrane 2 se tiene que:

$$T_1\theta_m = T_L\theta_L \qquad \Rightarrow \qquad T_1 = T_L \frac{\theta_L}{\theta_m} \qquad \Rightarrow T_1 = T_L \frac{N_1}{N_2} = nT_L$$

La ec. (18) se puede expresar como:

$$J_m \ddot{\theta}_m + b_m \dot{\theta}_m + nT_L = T_m$$

Sustituyendo la ec. (19) en la ecuación anterior se tiene:

$$J_m \ddot{\theta}_m + b_m \dot{\theta}_m + n\left(J_L \ddot{\theta}_L + b_L \dot{\theta}_L \right) = T_m$$

Sabiendo que $\theta_L = n\theta_m$ la ecuación anterior se reescribe como sigue:

$$J_m \ddot{\theta}_m + b_m \dot{\theta}_m + n\left(nJ_L \ddot{\theta}_m + nb_L \dot{\theta}_m \right) = T_m$$

$$\left(J_m + n^2 J_L\right)\ddot{\theta}_m + \left(b_m + n^2 b_L\right)\dot{\theta}_m = T_m \qquad (20)$$

Del circuito de armadura se extrae la siguiente ecuación:

$$L\frac{di_a}{dt} + Ri_a + e_b = e_i \qquad (21)$$

La Fuerza contra-electromotriz resulta en:

$$e_b = K_b \dot{\theta}_m \qquad (22)$$

Aplicando transformada de Laplace a las ec. (21) y (22), se tiene:

$$\left(Ls + R\right)I_a(s) + K_b s\Theta_m(s) = E_i(s) \qquad (23)$$

Como la corriente del campo es constante se puede expresar el par del motor como:

$$T_m = K \cdot i_a$$

De esta forma de la ec. (20) se extrae I_a:

$$\frac{\left(J_m + n^2 J_L\right)s^2\Theta_m(s) + \left(b_m + n^2 b_L\right)s\Theta_m(s)}{K} = I_a(s)$$

Esta expresión de I_a se sustituye en la ec. (23) para hallar la función de transferencia del sistema:

$$(Ls+R)\frac{\left(J_m+n^2J_L\right)s^2\Theta_m(s)+\left(b_m+n^2b_L\right)s\Theta_m(s)}{K}+K_b s\Theta_m(s)=E_i(s)$$

$$\left[(Ls+R)\left[\left(J_m+n^2J_L\right)s^2+\left(b_m+n^2b_L\right)s\right]+K_bK\right]\Theta_m(s)=K\cdot E_i(s)$$

$$\frac{\Theta_m(s)}{E_i(s)}=\frac{K}{(Ls+R)[(J_m+n^2J_L)s^2+(b_m+n^2b_L)s]+K_bK} \qquad (24)$$

Esta ecuación se puede reescribir como:

$$\frac{\Theta_m(s)}{E_i(s)}=\frac{K}{(Ls+R)\left(J_{eq}s^2+b_{eq}s\right)\ +K_bK} \qquad (25)$$

Donde:

$$J_{eq}=J_m+n^2J_L$$
$$b_{eq}=b_m+n^2b_L$$

Como $\frac{\theta_L}{\theta_m}=n$, se tiene:

$$\frac{\Theta_L(s)}{E_i(s)}=\frac{n\Theta_m(s)}{E_i(s)}=\frac{nK}{(Ls+R)\left(J_{eq}s^2+b_{eq}s\right)\ +K_bK}$$

REFERENCIAS

1. Ogata, K. (1993). Ingeniería de Control Moderna. 2da. Edición. Prentice Hall.
2. Dorsey, J. (2005). Sistemas de control continuos y discretos. McGraw-Hill.